אלגברה לינארית למהנדסי חשמל ואלקטרוניקה, הרצאות

יותם סמילנסקי, אוניברסיטת תל-אביב

רשימות אלו מתאימות לקורס שהועבר באוניברסיטת תל-אביב בסמסטר א' בשנת הלימודים תשע"ז. השימוש ברשימות היא על אחריות המשתמש ויתכנו טעויות, אם תמצאו כאלה תעדכנו אותי בבקשה במייל בכתובת yotamsmi@post.tau.ac.il.

תוכן עניינים

1 סימונים ומושגי יסוד

1.1 קבוצות

במתמטיקה, קבוצה היא אוסף סופי או אינסופי של איברים. מסמנים קבוצה בעזרת סוגריים מסולסלים ובאות אנגלית גדולה, למשל $B = \{2, 4, 6, ...\}$ $\quad A = \{1, 2, 3\}$.

שיכות ואי שייכות של איבר לקבוצה מסמנים בעזרת $\in$ ו $\notin$ בהתאמה, למשל $2 \in A$ אבל $7 \notin A$.

נאמר שקבוצה A מוכלת בקבוצה B אם כל $a \in A$ מקיים $a \in B$, ונסמן $A \subset B$. אם חשוב להדגיש שמדובר בהכלה ממש, כלומר קיים איבר ב B שאינו שייך ל A אז נרשום $A \subsetneqq B$.

קבוצות A ו B הן שוות אם $A \subset B$ וגם $B \subset A$, ובמקרה כזה נסמן $A = B$.

אין לסדר האיברים בקבוצה חשיבות, ואין משמעות לכך שאיבר מסוים מופיע מספר פעמים בקבוצה

$$\{2, 3\} = \{3, 2\} = \{2, 2, 3\}$$

קבוצות חשובות:

- הטבעיים $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
- השלמים $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
- הממשיים $\mathbb{R}$.
- הקבוצה הריקה $\emptyset$.

נסמן קבוצות גם באופן הבא

$$2\mathbb{Z} = \left\{ a \in \mathbb{Z} \middle| \frac{1}{2}a \in \mathbb{Z} \right\}$$

או בעברית: "קבוצת הזוגיים הינה קבוצת כל השלמים כך שאם מחלקים אותם בשתיים הם שלמים."

1.2 המספרים הממשיים, תכונות חשובות

תכונות ביחס לפעולת החיבור $(+)$:

- סגירות לחיבור: $a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \implies (a + b) \in \mathbb{R}$.
- קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור (איבר האפס 0): לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $a + 0 = a$.
- סגירות לאיבר נגדי ביחס לחיבור: לכל $a \in \mathbb{R}$ קיים $b \in \mathbb{R}$ המקיים $a + b = 0$. מסמנים $b = -a$.

- חוק החילוף (קומוטטיביות) $a+b=b+a$ וחוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

תכונות ביחס לפעולת הכפל $(\cdot)$:

- סגירות לכפל: $a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R} \implies (a\cdot b)\in\mathbb{R}$.
- קיום איבר ניטרלי ביחס לכפל (איבר היחידה 1): לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $a\cdot 1=a$.
- סגירות לאיבר הופכי ביחס לכפל: לכל $0\neq a\in\mathbb{R}$ קיים $b\in\mathbb{R}$ המקיים $a\cdot b=1$. מסמנים $b=a^{-1}$.
- חוק החילוף $a\cdot b=b\cdot a$ וחוק הקיבוץ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

תכונה משותפת לשתי הפעולות:

- חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

שימו לב שבטבעיים אין למשל קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור, ושבשלמים אין למשל סגירות להופכי. לקבוצות עליהן מוגדרות שתי פעולות העונות על התנאים הנ"ל קוראים **שדה** ונראה דוגמאות נוספות בהמשך הקורס לשדות סופיים ואינסופיים. לאיברי השדה קוראים **סקלרים**.

1.3 מושגי יסוד בפורמליזם מתמטי

- "הגדרה" – תיאור אובייקט על פי תכונות כלשהן. למשל:

  הגדרה: מספר ממשי יקרא **רציונלי** אם ניתן לבטא אותו על ידי מנה של מספרים שלמים.

- "סימון" – כדי לחסוך במילים ולפעמים לדייק מתמטית, אנחנו מסמנים אובייקטים בעזרת סמלים. למשל:

  סימון: $\mathbb{Q} := \left\{x\in\mathbb{R} \middle| \text{there exist } m,n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0 \text{ such that } x=\frac{m}{n}\right\} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m,n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0\right\}$.

- "דוגמה" – מקרה פרטי כלשהו, או שימוש מסוים בטכניקה כלשהי. למשל:

  דוגמה: $7\in\mathbb{Q}$ אבל $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ (פיתגורס).

- "משפט" Theorem – עובדה מתמטית (קיימת לה הוכחה מתמטית) בעלת חשיבות רבה, למשל

  משפט: קיים ממשי שאינו רציונלי.

- "טענה" Proposition – עובדה מתמטית פחות מרגשת, למשל

  טענה: הרציונלים סגורים לחיבור.

- "למה" Lemma – טענת עזר שמהווה חלק מהוכחת משפט.

- "הוכחה" – הסקת עובדה מתמטית מתוך הגדרות האובייקטים הרלוונטים בעזרת כללי הסקה לוגיים ובעזרת עובדות מתמטיות ידועות.

שימו לב שההבדל בין משפט, טענה ולמה הוא סמנטי וסגנוני, ושלושתם מסמלים אמיתות מתמטיות אותן בדרך כלל נוכיח בקורס. כדאי גם לא להתבלבל בין טענה במובן לעיל, לבין טענה במובן Statement שמהווה טענה כלשהי שיתכן ואינה נכונה (כמו למשל בשאלות מסוג "הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות"), בעוד טענה במובן Proposition היא עובדה מתמטית (ולכן לא כדאי לנסות להפריך אותה..).

1.4 סוגי טענות

ישנם שני סוגים חשובים של טענות מתמטיות:

- אם נתון א', אז בהכרח ב' מתקיים ($\Longleftarrow$), כלומר מאמיתות א' ניתן להסיק את אמיתות ב'.
- א' אם ורק אם ב' ($\Longleftrightarrow$), כלומר כמו במקרה הקודם אבל לשני הכיוונים (צריך להוכיח כל כיוון בנפרד).

כלליות ההוכחה: אם נרצה להראות תכונה של קבוצה מסוימת, יש לעשות זאת באופן כללי ולא רק עבור דוגמה מסוימת. עם זאת לפעמים כשנוכיח טענה כללית נשתמש בביטוי **ללא הגבלת הכלליות** ונבדוק את הטענה עבור מה שלמראית עין נראה כמקרה פרטי, אבל בעצם לא משנה את כלליות ההוכחה. למשל אם אנחנו טוענים טענה כלשהי בסגנון "לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים משהו", אז נוכל להתחיל את ההוכחה ב"נניח ללא הגבלת הכלליות כי $x \geq y$...". אנחנו הרי יודעים שאו ש $x \leq y$ או $x \leq y$, ועד כדי שינוי הסמלים הללו ההוכחה עבור המקרה הראשון תהיה זהה לשני, ולכן ניתן להניח את ההנחה הזאת, תוך ההדגשה שזה נעשה ללא הגבלת הכלליות.

שלילת טענה: אם נרצה להראות שתכונה לא מתקיימת, מספיק למצוא דוגמה נגדית, כלומר השלילה של "לכל א' מתקיים ב'" היא "קיים א' שאינו מקיים את ב'".

דוגמאות:

טענה 1.1 $\mathbb{Q}$ סגורה לחיבור.

הוכחה: יהיו $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ שני רציונליים, כלומר $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ וכן $q, n \neq 0$. נרצה להראות כי $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, כלומר שקיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש- $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$. ואכן, בעזרת לקיחת מכנה משותף נקבל כי $a = mq + np \in \mathbb{Z}$ ו- $0 \neq b = nq \in \mathbb{Z}$ עונים על הנדרש. ■

טענה 1.2 $\mathbb{N}$ אינה סגורה ללקיחת נגדי.

הוכחה: מספיק להראות שקיימת דוגמה נגדית. ואכן, עבור $1 \in \mathbb{N}$, לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 + a > 1$ ובפרט לא קיים $a \in \mathbb{N}$ עבורו $1 + a = 0$, כלומר אין ל- 1 נגדי בטבעיים. ■

1.5 טכניקות הוכחה

ישנן שלוש טכניקות הוכחה שימושיות במיוחד:

- הוכחה ישירה, כמו בדוגמה שראינו לסגירות הרציונלים לחיבור.
- הוכחה באינדוקציה.
- הוכחה על דרך השלילה.

טענה 1.3 לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ אכן מתקיים $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$.

הנחת האינדוקציה: נניח שעבור $n = k$ מתקיים $1 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$.

צעד האינדוקציה: נוכיח כי על סמך ההנחה עבור $n = k$, הטענה מתקיימת גם עבור $n = k + 1$. ואכן

$$\begin{aligned} 1 + ... + k + (k+1) &= (1 + ... + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

כנדרש. ■

משפט 1.4 קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

הוכחה: נוכיח על דרך השלילה. נניח כי קיים מספר סופי של ראשוניים, ונגיע לסתירה עם הנתון או עובדות ידועות. נניח אם כן כי יש N ראשוניים בלבד, ונסמנם $p_1, ..., p_N$. נתבונן במספר הטבעי $Q = p_1 \cdots p_N + 1$ ונזכור של- Q יש פירוק למכפלת ראשוניים כמו לכל טבעי. כעת, אם Q עצמו הוא ראשוני, קיבלנו סתירה, שכן בבירור $Q \notin \{p_1, ..., p_N\}$. אחרת, אחד מהראשוניים הללו בהכרח מחלק את Q, בסתירה לכך ש Q בחלוקת כל אחד מהראשוניים הללו נותן שארית 1. ■

2 מערכות משוואות לינאריות מעל $\mathbb{R}$ ופיתרונן

2.1 מערכת משוואות לינאריות מעל הממשיים

הגדרה 2.1 משוואה לינארית ב- n משתנים מעל הממשיים הינה משוואה מהצורה

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, .., a_n, b \in \mathbb{R}$ המקדמים, ו- $x_1, ..., x_n$ משתנים.

דוגמה: משוואה בשני משתנים $-2x_1+x_2=\frac{2}{3}$.

הגדרה 2.2 מערכת של m משוואות לינאריות ב– n נעלמים הינה המערכת

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...+a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+...+a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+...+a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינאריות הינה קבוצת הערכים S המקיימים את כל המשוואות שמערכת, כלומר:

$$S=\left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, c_1,...,c_n\in\mathbb{R} \middle| \begin{matrix} a_{1,1}c_1+a_{1,2}c_2+...+a_{1,n}c_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}c_1+a_{m,2}c_2+...+a_{m,n}c_n & = b_m \end{matrix}\right\}$$

אנחנו נראה ש S עשויה להיות קבוצה ריקה, קבוצה עם איבר אחד או קבוצה אינסופית.

דוגמאות:

1. $m=1,\ n=2$:
$$\begin{cases} 3x_1+x_2 &= \pi \end{cases}$$

2. $m=3,\ n=1$:
$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ -2x_1 &= -2 \\ 9x_1 &= 0 \end{cases}$$

3. $m=2,\ n=2$:
$$\begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ 2x_1-x_2 &= 5 \end{cases}$$

שאלה מרכזית: בהנתן מערכת משוואות לינאריות, האם קיים לה פתרון? האם הפתרון הוא יחיד? אם ישנם הרבה פתרונות, האם ניתן לתאר צורה כללית של קבוצת הפתרונות S? נחזור לדוגמאות:

1. לכל בחירה של x_1, ניקח $x_2=\pi-3x_1$. קיבלנו אינסוף פתרונות, והם מהצורה
$$S=\left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ \pi-3c_1 \end{pmatrix} \middle| \, c_1\in\mathbb{R}\right\}$$

2. מהמשוואה הראשונה נובע $x_1=1$, אבל מהשלישית בהכרח $x_1=0$. לכן אין פתרון למערכת, כלומר $S=\emptyset$.

3. פעם לימדו אותנו לחבר משוואות ולהציב. ננסה את זה כאן

(א) נחבר את המשוואה השניה למשוואה הראשונה:
$$\begin{cases} 3x_1 & = 6 \\ 2x_1 - x_2 & = 5 \end{cases}$$

(ב) נכפול את המשוואה הראשונה ב $\frac{1}{3}$:
$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ 2x_1 - x_2 & = 5 \end{cases}$$

(ג) נחסר מהמשוואה השניה את המשוואה הראשונה פעמיים:
$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ -x_2 & = 1 \end{cases}$$

(ד) נכפול את המשוואה השניה ב -1:
$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ x_2 & = -1 \end{cases}$$

קיבלנו מערכת חדשה, שממנה קבוצת הפתרונות $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ מתקבלת באופן מיידי.

נרצה לפתח אלגוריתם כללי שמאפשר לנו לגזור מתוך מערכת משוואות לינאריות נתונה, מערכת משוואות לינאריות פשוטה יותר בעלת קבוצת פתרונות זהה. לשם כך נזדקק למטריצות.

2.2 מטריצות מקדמים, דירוג ופעולות אלמנטריות

הגדרה 2.3 עבור מערכת משוואות לינאריות נתונה, נסמן את **מטריצת המקדמים** $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

ואת **מטריצת המקדמים המורחבת** $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$.

זוהי טבלה (מטריצה) בת m שורות (שורה לכל משוואה) ו- $n+1$ עמודות (עמודה לכל משתנה ועומת המקדמים החופשיים).

המקדם $a_{i,j}$ הינו המקדם המופיע בשורה i בעמודה j.

דוגמה: למערכת מהדוגמה הקודמת, מטריצת המקדמים המורחבת המתאימה היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

נפעיל את אותן הפעולות שהפעלנו, הפעם על המטריצה:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(a)} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(b)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(c)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(d)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ושימו לב שכל מטריצה מתאימה למערכת שבדוגמה לעיל.

הגדרה 2.4 התהליך שתיארנו בדוגמה האחרונה נקרא **דירוג מטריצה**. ישנן שלוש פעולות דירוג חוקיות, והן נקראות **פעולות אלמנטריות על שורות המטריצה**:

1. החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. כפל שורה בסקלר שונה מאפס $R_i \leftarrow \lambda R_i$.
3. הוספת שורה מוכפלת בסקלר לשורה אחרת $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$.

בדוגמה האחרונה ביצענו את הפעולות $(a) = R_1 \leftarrow R_1 + R_2$, $(b) = R_1 \leftarrow \frac{1}{3}R_1$ וכן הלאה.

דוגמה: נפתור את מערכת המשוואות הלינאריות

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 2 \\ x + 4y + 9z & = 8 \\ x + 8y + 27z & = 26 \end{cases}$$

בעזרת דירוג מטריצת המקדמים המורחבת המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 8 & 27 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 24 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 6R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{6}R_6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3]{R_1 \leftarrow R_1 + 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

וקיבלנו $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

טענה 2.5 הפעולות האלמנטריות על שורות המטריצה הן הפיכות, כלומר לכל פעולה אלמנטרית קיימת פעולה הפכית כך שהפעלתן זו אחר זו על מטריצה נתונה משאירה אותה ללא שינוי.

הוכחה: נעבור על שלושת סוגי הפעולות האלמנטריות:

1. עבור $R_i \leftrightarrow R_j$ הפעולה ההפכית היא אותה ההחלפה $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. עבור $R_i \leftarrow \lambda R_i$ כאשר $\lambda \neq 0$, הפעולה ההפכית נכפיל היא כפל בהופכי $R_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} R_i$.
3. עבור $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ הפעולה ההפכית היא חיבור הנגדי $R_i \leftarrow R_i - \lambda R_j$. ■

הגדרה 2.6 נאמר שמטריצה A היא שקולת שורות למטריצה B אם קיימת סדרה סופית של פעולות אלמנטריות שמעבירה מ A ל B, ונסמן $A \sim B$.

טענה 2.7 יהיו A, B, C מטריצות כלשהן. מתקיים

1. $A \sim A$ (רפלקסיביות).
2. אם $A \sim B$ וגם $B \sim C$ אז $A \sim C$ (טרנזיטיביות).
3. אם $A \sim B$אז $B \sim A$ (סימטריות).

הוכחה: לכל מקרה נמצא את סדרת הפעולות האלמנטריות המתאימות:

1. אין צורך באף פעולה (או $R_1 \leftarrow 1 \cdot R_1$).
2. נפעל על שורות A עד שנקבל את B, ומכאן נפעל על שורות B עד שנקבל את C.
3. נפעיל את הפעולות ההפכיות בסדר ההפוך. ■

הערה: יחס שמקיים את שלוש התכונות הנ"ל נקרא יחס שקילות. למשל יחס השוויון על המספרים הממשיים הוא יחס כזה.

משפט 2.8 פעולות אלמנטריות על שורות מטריצה לא משנות את קבוצת הפתרונות של המערכות המתאימות.

הוכחה: מספיק להוכיח שפתרון כלשהו של מערכת הינו פתרון גם של המערכת לאחר הפעלת פעולה אלמנטרית (כיוון שקבוצת הפתרונות המקורית תהיה מוכלת בזאת שלאחר הפעלת הפעולה, אבל כיוון שכל הפעולות הפוכות, גם ההכלה בכיוון השני מתקבלת, ומכאן שוויון הקבוצות). נניח אם כן כי $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ פתרון למערכת.

1. החלפת סדר השורות $R_i \leftrightarrow R_j$ לא תשנה את הפתרון, כי הפתרון מקיים את המשוואות כולן ללא חשיבות לסדר.

2. כפל שורה בסקלר $R_i \leftarrow \lambda R_i$ כאשר $\lambda \neq 0$. נניח כי השורה i במטריצה היא $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} & b_i \end{array}\right)$, אז מתקיים $a_{i,1}c_1 + ... + a_{i,n}c_n = b_i$. לכן, מתכונות הממשיים (חוק הפילוג למשל) $\lambda a_{i,1}c_1 + ... + \lambda a_{i,n}c_n = \lambda b_i$. כלומר הפתרון מקיים גם את משוואה $(\lambda a_{i,1})\, x_1 + ... + (\lambda a_{i,n})\, x_n = (b_i \lambda)$, שמתאימה לשורת שמתקבלת לאחר הפעלת הפעולה.

3. הוספת שורה j מוכפלת בסקלר לשורה i, $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$. כמקודם, מתקיים

$$\begin{aligned} a_{i,1}c_1 + ... + a_{i,n}c_n &= b_i \\ a_{j,1}c_1 + ... + a_{j,n}c_n &= b_j \end{aligned}$$

ולכן $\left(a_{i,1} + \lambda a_{j,1}\right) c_1 + ... + \left(a_{i,n} + \lambda a_{j,n}\right) c_n = b_i + \lambda b_j$. כלומר הפתרון מקיים גם את המשוואה $\left(a_{i,1} + \lambda a_{j,1}\right) x_1 + ... + \left(a_{i,n} + \lambda a_{j,n}\right) x_n = b_i + \lambda b_j$, שמתאימה לשורת שמתקבלת לאחר הפעלת הפעולה. ■

מסקנה 2.9 דירוג מטריצה שומר על אוסף הפתרונות של המערכת המתאימה, ולמטריצות שקולות אוספי פתרונות זהים.

2.3 מטריצות מדורגות, מטריצות מדורגות קנונית ושיטת האלימינציה של גאוס

הגדרה 2.10 **האיבר הפותח** בשורת מטריצה הינו האיבר הראשון בשורה שאינו אפס. מטריצה נקראת **מדורגת** אם בכל שורה האיבר הפותח נמצא בעמודה ימנית יותר מהעמודה בה נמצא האיבר הפותח של השורות שמעליה. מטריצה מדורגת נקראת **מדורגת קנונית** אם בנוסף האיבר הפותח בכל שורה (אם קיים) הוא 1, בעמודה בה יש איבר פותח שאר המקדמים הם 0, ואם יש שורות אפסים אז הן בתחתית המטריצה.

דוגמאות: משמאל מדורגת, מימין מדורגת קנונית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

שיטת האלימינציה של גאוס: בבואנו לפתור מערכת משוואות לינארית המתאימה למטריצה $(A|b)$, נרצה להביא את A לצורה מדורגת ואף לצורה מדורגת על ידי פעולות שורות אלמנטריות. מהצורות המדורגת יהיה ניתן להסיק בין היתר את מספר הפתרונות, ומהצורה הקנונית נוכל להסיק את צורתם הכללית. למשל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \dashleftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 10 \end{array}\right).$$

עמודות בהן יש איבר פותח מצביעות על משתנה תלוי, ואילו עמודות ללא איבר פותח מצביעות על משתנה חופשי (או בלתי תלוי). בדוגמה שלנו המשתנים x_1, x_2 תלוים בעוד המשתנה x_3 חופשי. אם נציב במשתנים החופשיים פרמטרים כלשהם, נוכל לבטא את הערכים המתאימים למשתנים התלוים בעזרת הפרמטרים הללו. במקרה שלנו נציב במשתנה החופשי $x_3 = s$, אז $x_1 = 7s - 11,\ x_2 = -5s + 9$, כלומר

$$.S = \left\{ \begin{pmatrix} 7s - 11 \\ -5s + 9 \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

2.4 מספר הפתרונות של מערכת משוואות לינאריות

הערה: אנחנו יכולים ללמוד לגבי "סוג" קבוצת הפתרונות מתוך הצורה המדורגת בלבד:

- **אין פתרון:** אם יש שורת סתירה, כלומר שורה מהצורה $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right)$ עבור $\alpha \neq 0$. במילים אחרות יש איבר פותח בעמודת המקדמים החופשיים.

- **פתרון יחיד:** אם אין אף שורת סתירה, ואם בכל עמודה פרט לעמודת המקדמים החופשיים יש איבר פותח, כלומר אין משתנים חופשיים.

- **אינסוף פתרונות:** אם אין שורת סתירה, ויש עמודה ללא איבר פותח, כלומר יש משתנה חופשי (כמו בדוגמה הקודמת).

משפט 2.11 כל מטריצה שקולה למטריצה מדורגת קנונית יחידה (נראה בהמשך).

טענה 2.12 אם במערכת יש יותר משתנים ממשוואות אז או שאין פתרון או שיש אינסוף.

הוכחה: נניח שקיים לפחות פתרון אחד, כלומר אין שורת סתירה. אז כיוון שיש יותר משתנים (עמודות במטריצת המקדמים המצומצמת) ממשוואות (שורות), אז בהכרח יש עמודה אחת ללא איבר פותח של שורה, כלומר ישנו משתנה חופשי אחד לפחות ולכן אינסוף פתרונות. ■

הגדרה 2.13 מערכת משוואות לינאריות נקראת מערכת **הומוגנית** אם המקדמים החופשיים כולם 0. במקרה כזה גם הצורה המדורגת שלה תהיה הומוגנית.

נשים לב למערכת הומוגנית פתרון יחיד או אינסוף פתרון, כיוון שתמיד קיים **הפתרון הטריוויאלי** עבורו $c_1 = ... = c_n = 0$.

תרגיל: לאילו ערכי a למערכת הבאה קיים פתרון יחיד בלבד, אינסוף פתרונות או אפס פתרונות? מצאו את קבוצת הפתרונות במקרים השונים.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון: ראשית, יש לפחות פתרון אחד, כיוון שזאת מערכת המוגונית. נדרג:

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - aR_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 0 \end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון יחיד נדרוש שהשורות לא יתאפסו (אחרת בהכרח יש משתנה חופשי). לכן נדרוש $a \neq 1$ וגם $a \neq -2$. במקרה כזה הפתרון היחיד הוא בהכרח הפתרון הטריוויאלי. עבור המקרים האחרים נקבל:

- $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow S = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

- $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

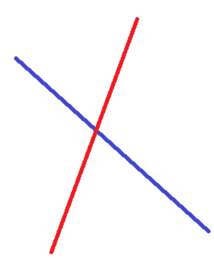
ולכן

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

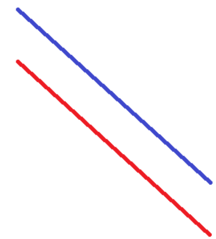
2.5 אינטואיציה גיאומטרית

נתבונן על המערכות הבאות של שתי משוואות בשני משתנים. נשים לב כי ניתן לחשוב על קבוצת הפתרונות של כל אחת מהמשוואות בכל מערכת כעל ישר במישור x_1, x_2, ועל קבוצת הפתרונות של כל אחת מהמערכות כעל חיתוכם של הישרים הנ"ל:

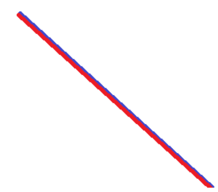
1. $\begin{cases} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \end{cases}$ כפי שאינו יש פתרון אחד, המתאים לכך שמדובר בחיתוך של שני ישרים לא מקבילים.



2. $\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 - x_2 & = 0 \end{cases}$ כאן מדובר על שני ישרים מקבילים, שאינם נחתכים ולכן אין למערכת פתרונות כלל.



3. $\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 - x_2 & = -1 \end{cases}$ שני הישרים המתאימים מתלכדים לישר אחד, כלומר ישנם אינסוף פתרונות.



3 המרחב $\mathbb{R}^n$ – מרחבי n־יות

3.1 הגדרות ופעולות

הגדרה 3.1 הקבוצה $\mathbb{R}^n$ מוגדרת על ידי $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^n$.

כלומר $\mathbb{R}^n$ הינו קבוצת כל ה n־יות של מספרים ממשיים. שתי n־יות נקראות שוות אם ורק אם כל מקדמיהן שווים.

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (-\pi) \in \mathbb{R}^1, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}^7, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בנוסף, אם S היא קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינאריות עם n משתנים, אז $S \subset \mathbb{R}^n$.

הערה: בהמשך נראה ש $\mathbb{R}^n$ הינו דוגמה למרחב וקטורי, ובמקום n־יה נאמר וקטור, אבל לעת עתה נדבר על n־יות בלבד.

הגדרה 3.2 המרחב $\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ הינו קבוצת ה n־יות (כלומר הקבוצה $\mathbb{R}^n$) ביחד עם שתי הפעולות הבאות:

1. חיבור:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

2. כפל בסקלר (ממשי $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

מתכונות החיבור והכפל הממשיים מתקיים:

תכונות החיבור: יהיו $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, מתקיים:

- $(u+v)+w = u+(v+w)$ (אסוציאטיביות)
- $u+v = v+u$ (קומוטטיביות)
- קיים $0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש $u+0=u$ (0 הינה n־ית האפס)

תכונות הכפל בסקלר: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, מתקיים:

- $\mu(\lambda v) = (\mu\lambda) v$.
- $(\mu+\lambda) v = \mu v + \lambda v$.
- $\lambda(v+u) = \lambda v + \lambda u$.

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הערה: אם $n \neq m$ ו– $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ אז **אין משמעות** לביטוי $u+v$. אסור לכפול או לחלק n־יות!

נשים לב שמתכונות הממשיים והאופן בו מוגדרות פעולות החיבור והכפל בסקלר ב $\mathbb{R}^n$, נובע כי $\mathbb{R}^n$ סגור לחיבור, סגור ללקיחת נגדי וסגור לכפל בסקלר.

סימון: את הנגדי של $v \in \mathbb{R}^n$ נסמן ב $-v \in \mathbb{R}^n$. כלומר אם $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ אז $-v = -\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

ומתקיים

$$v + (-v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^n$$

צירופים לינאריים (צ"ל)

הגדרה 3.3 יהיו $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ כלומר n m־יות. נאמר כי $v \in \mathbb{R}^m$ הינו צירוף לינארי (צ"ל) של $u_1, ..., u_n$ אם קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$v = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$$

דוגמה: למשל $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ הינו צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ כי מתקיים

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הערה: בהנתן $v \in \mathbb{R}^m$ ו $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}^m$ יתכן כי v **אינו** צירוף לינארי של $u_1, ..., u_n$, יתכן שניתן להציגו כצירוף לינארי של $u_1, ..., u_n$ **באופן יחיד** ויתכן שישנן **אינסוף** דרכים.

כדי להראות ש v צירוף לינארי של $u_1, ..., u_n$ נרצה למצוא מקדמים מתאימים $\lambda_1, ..., \lambda_n$ שמקיימים את ההגדרה, או להראות שקיימים כאלו. נעזר לשם כך במערכת משוואות לינארית מתאימה. נניח:

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, ..., u_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

אז השאלה האם קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ עבורם $v = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$ שקולה בעצם לשאלה האם קיים פתרון למערכת

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

ועל השאלה הזאת אנחנו יודעים לענות.

דוגמה: האם $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$? ומה לגבי $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

פתרון: נבדוק האם קיימים $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ המקיימים $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_1$, כלומר האם יש פתרון למערכת

$$\begin{cases} x_1 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 & = 3 \\ x_1 + 2x_n & = 0 \end{cases}$$

נציג במטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו שלמערכת אכן יש פתרון $\lambda_1 = 2$ ו $\lambda_2 = -1$ ופתרון זה יחיד. אפשר לבדוק שאכן

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פעולות דירוג זהות עם עמודת מקדמים חופשיים המורכבת $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ היתה מביאה אותנו לשורת סתירה, ולכן 3־יה זו אינה צירוף לינארי של ה 3־יות הנתונות.

3.2 קבוצה פורשת

סימון: בהנתן $u_1,...,u_n \in \mathbb{R}^m$ נסמן $Span_{\mathbb{R}}\left\{u_1,...,u_n\right\} \subset \mathbb{R}^m$ את קבוצת הצירופים הלינארים של $u_1,...,u_n$ עם מקדמים ממשיים, ואומרים שזו תת הקבוצה **הנפרשת** על ידי $u_1,...,u_n$:

$$Span_{\mathbb{R}}\left\{u_1,...,u_n\right\} = \left\{\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n \middle| \lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}\right\}$$

הגדרה 3.4 אומרים שהקבוצה $\left\{u_1,...,u_n\right\} \subset \mathbb{R}^m$ **פורשת** את $\mathbb{R}^m$ אם $Span_{\mathbb{R}}\left\{u_1,...,u_n\right\} = \mathbb{R}^m$ או במילים אחרות, כל איבר $v \in \mathbb{R}^m$ ניתן להצגה (לאו דווקא באופן יחיד) כצירוף לינארי של $u_1,...,u_n$. שימו לב שזו תכונה של קבוצה.

כדי להראות שקבוצה פורשת את $\mathbb{R}^m$ בודקים אם **לכל** $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ יש פתרון למערכת שתארנו לעיל.

דוגמה: קבעו האם הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

פתרון: נציב במטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & b_2 \end{array}\right)$$

ונראה אם לכל b_1, b_2 יש פתרון למערכת, כלומר נוודא שאין אילוצים כלשהם על b_1, b_2 כדי למנוע שורת סתירה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & b_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_2 \\ 2 & 0 & -1 & b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & -2 & -5 & b_1 - 2b_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & b_2 - \frac{1}{2}b_1 \end{array}\right)$$

ואכן, מהצורה המדורגת ניתן להסיק כי ישנו פתרון לכל b_1, b_2 (אינסוף פתרונות למען הדיוק).

דוגמה: האם $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$?

פתרון: נפעל כמקודם ונקבל

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 3 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_2 \end{array}\right)$$

ולמערכת הזאת אין פתרון אם $b_3 - 3b_2 \neq 0$, כלומר קיבלנו אילוץ על הקבוצה הנפרשת ולכן אינה פורשת את $\mathbb{R}^3$.

3.3 תלות לינארית (ת"ל) ואי־תלות לינארית (בת"ל)

הגדרה 3.5 נאמר ש $\{u_1, ..., u_n\} \subset \mathbb{R}^m$ היא קבוצה **תלויה לינארית** (ת"ל) אם קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, לא כולם אפס, כך שמתקיים

$$0 = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$$

הערה: באופן שקול – קבוצה היא בת"ל אם הדרך היחידה להציג את m־ית האפס כצירוף לינארי של איברי הקבוצה היא באמצעות הצירוף הטריוויאלי.

הערה: זה שקול לכך שלמערכת ההומוגנית עם העמודות $u_1, ..., u_n$ יש אינסוף פתרונות.

הגדרה 3.6 נאמר ש $S \subset \mathbb{R}^m$ היא קבוצה **בלתי תלויה לינארית** (בת"ל) אם לכל $u_1, ..., u_n \in S$ ולכל $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, אם

$$0 = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$$

אז $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, כלומר אם הדרך היחידה להציג את m־ית האפס כצירוף לינארי של איברי הקבוצה היא באמצעות הצירוף הטריוויאלי. שימו לב שזו תכונה של קבוצה.

הערה: זה שקול שלמערכת ההומוגנית עם העמודות $u_1, ..., u_n$ יש את הפתרון הטריוויאלי בלבד.

דוגמה: האם $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ קבוצה תלויה או בלתי תלויה לינארית?

פתרון: נרשום את אפס כצירוף לינארי של איברי הקבוצה

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונבדוק כעת אם מהשוויון הנ"ל נובע בהכרח כי $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. נציב במטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וקיבלנו כי ישנם אינסוף פתרונות, ובפרט אחד מהם אינו הפתרון הטריוויאלי, ולכן הקבוצה תלויה לינארית.

הערה: הקבוצה הריקה $\emptyset \subset \mathbb{R}^m$ הינה קבוצה בלתי תלויה לינארית, שכן התנאי לאי תלות לינארית מתקיים באופן ריק.

טענה 3.7 $\{u_1,...,u_n\} \subset \mathbb{R}^m$ תלויה לינארית אם ורק אם לפחות **אחד** מבין $u_1,...,u_n$ הינו צירוף לינארי של השאר.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נניח כי $\{u_1,...,u_n\} \subset \mathbb{R}^m$ תלויה לינארית, כלומר קיימים $\lambda_1,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$, לא כולם אפס, כך שמתקיים $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0$. נניח ללא הגבלת הכלליות ש $\lambda_1 \neq 0$ (אחרת נחליף אינדקסים), אז

$$u_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}u_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}u_n.$$

$(\Rightarrow)$ נניח ללא הגבלת הכלליות כי $u_1 = \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$. אז $1 \cdot u_1 - \alpha_2 u_2 - ... - \alpha_n u_n = 0$ הינו צירוף לינארי לא טריוויאלי של אפס, ולכן הקבוצה תלויה לינארית. ■

הערה: לאו דווקא כל האיברים ניתנים כצירוף לינארי של השאר, למשל בקבוצה $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ האיבר הראשון אינו ניתן לביטוי כצירוף לינארי של האחרים.

טענה 3.8 תהי $\{u_1,...,u_n\} \subset \mathbb{R}^m$ בלתי תלויה לינארית, ויהי $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$. אז $\{u_1,...,u_n,v\}$ בת"ל אם ורק אם v אינו צירוף לינארי של $u_1,...,u_n$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נניח על דרך השלילה כי v הינו צירוף לינארי של $u_1,...,u_n$, אז על פי הטענה הקודמת $\{u_1,...,u_n,v\}$ תלויה לינארית, בסתירה להנחה.

$(\Rightarrow)$ נניח בשלילה כי $\{u_1,...,u_n,v\}$ תלויה לינארית, אז קיימים $\lambda_1,...,\lambda_n,\alpha \in \mathbb{R}$ לא כולם אפס, כך שמתקיים $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n + \alpha v = 0$. נניח ראשית כי $\alpha = 0$, אז כיוון שהקבוצה $\{u_1,...,u_n\}$ בלתי תלויה לינארית בהכרח $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, בסתירה להנחה שלא כל המקדמים אפס. נניח כעת כי $\alpha \neq 0$. אז

$$v = -\frac{\lambda_2}{\alpha}u_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\alpha}u_n$$

בסתירה להנחה ש v אינו צירוף לינארי של $u_1,...,u_n$. ■

שתי טענות שמתייחסות לשורות מטריצה (בניגוד לעמודות)

טענה 3.9 קבוצה היא בת"ל אם ורק אם בצורה המדורגת קנונית של מטריצה **ששורותיה** הן איברי הקבוצה, אין שורת אפסים.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נזכור כי הפעולות האלמנטריות הן בדיוק הפעולות הדרושות כדי ליצור צירופים לינארים של שורות המטריצה. אם הקבוצה היא בלתי תלויה לינארית אז אין צירוף לינארי לא טריוויאלי של איברי הקבוצה ששווה לאפס, ולכן לא תיתכן שורת אפסים.

$(\Rightarrow)$ נניח כי אין שורת אפסים בצורה המדורגת קנונית, ונניח בשלילה כי הקבוצה היא ת"ל. אז קיים איבר שהוא צירוף לינארי של שאר האיברים. נשתמש בצירוף זה כדי לחסר מהשורה המתאימה כפולות של שאר השורות שיתנו שורת אפסים. נוריד את השורה הזאת לתחתית המטריצה, ונדרג את שאר שורות המטריצה דירוג קנוני. אז כעת המטריצה כולה מדורגת קנונית, ומיחידות הצורה המדורגת קנונית נקבל כי יש בה שורת אפסים, בסתירה להנחה. ■

הערה: מאלגוריתם הדירוג (שיטת האלמינציה של גאוס) נובע כי בצורה המדורגת קנונית ישנה שורת אפסים אם ורק אם כל צורה מדורגת של המטריצה מכילה שורת אפסים, ומספר השורות האלה זהה.

טענה 3.10 יהיו A, B שתי מטריצות עם m שורות ו n עמודות, ונניח כי **שורותיהן** $u_1, ..., u_m \in \mathbb{R}^n$ ו $w_1, ..., w_m \in \mathbb{R}^n$ בהתאמה. אם A שקולת שורות ל B אז $Span_{\mathbb{R}} \{u_1, ..., u_m\} = Span_{\mathbb{R}} \{w_1, ..., w_m\}$.

הוכחה: נניח כי $v \in Span_{\mathbb{R}} \{u_1, ..., u_m\}$, כלומר $v = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_m u_m$. כפי שראינו בטענה קודמת, כיוון שהפעולות האלמנטריות הן הפיכות מספיק להראות שכל $v \in \mathbb{R}^n$ כזה שייך גם לקבוצה שנפרשת על ידי שורות המטריצה המתקבלת לאחר פעולה אלמנטרית אחת. נמצא ממש את המקדמים $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n$ החדשים המתאימים.

1. החלפת סדר השורות $R_i \leftrightarrow R_j$: נחליף בין המקדמים, כלומר ניקח $\tilde{\lambda}_i = \lambda_j$ ו $\tilde{\lambda}_j = \lambda_i$.
2. כפל שורה בסקלר $R_i \leftarrow \alpha R_i$ כאשר $\alpha \neq 0$: נחלק את המקדם המתאים ב λ, כלומר ניקח $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\alpha}$.
3. הוספת שורה j מוכפלת בסקלר לשורה i, $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$: כאן צריך לשנות רק $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j - \alpha \lambda_i$. ■

3.4 בסיס ב $\mathbb{R}^m$

הגדרה 3.11 קבוצה $\{u_1, ..., u_n\} \subset \mathbb{R}^m$ נקראת **בסיס** של $\mathbb{R}^m$ אם היא **פורשת** את $\mathbb{R}^m$ וגם **בלתי תלויה לינארית**.

דוגמה: הבסיס הסטנדרטי ב $\mathbb{R}^n$ מורכב מה־n־יות

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- זו קבוצה פורשת כי לכל $b_1, ..., b_n$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

ולכן ניתן לבחור $\lambda_1 = b_1, ..., \lambda_n = b_n$.

- זו קבוצה בלתי תלויה לינארית כי למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right)$$

יש פתרון יחיד בלבד, והוא הפתרון הטריוויאלי $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

משפט 3.12 קבוצה $B=\{u_1,...,u_n\}\subset\mathbb{R}^m$ היא בסיס ב $\mathbb{R}^m$ אם ורק אם לכל $v\in\mathbb{R}^m$ **קיימת** הצגה **יחידה** כצירוף לינארי של איברי B.

הוכחה: ($\Leftarrow$) נניח כי B בסיס, ויהי $v\in\mathbb{R}^m$ כלשהו. B קבוצה פורשת, ולכן v ניתן להצגה צירוף לינארי של איברי B. כדי להראות שישנה הצגה יחידה בלבד נניח על דרך השלילה כי ישנן שתי הצגות שונות:

$$v=\lambda_1u_1+...+\lambda_nu_n$$

$$v=\mu_1u_1+...+\mu_nu_n$$

$$\Longrightarrow 0=(\lambda_1-\mu_1)\,u_1+...+(\lambda_n-\mu_n)\,u_n$$

מההנחה ששתי ההצגות שונות, בהכרח קיים i עבורו $\lambda_i\neq\mu_i$ וקיבלנו הצגה לא טריוויאלית של האפס, בסתירה לנתון כי B בסיס ובפרט בלתי תלויה לינארית.

($\Rightarrow$) מההנחה B פורשת ("**קיימת**"), וכן לאפס יש הצגה **יחידה** כצירוף לינארי של איברי הקבוצה ולכן היא בלתי תלויה לינארית. סך הכל קיבלנו כי B בסיס. ■

משפט 3.13 הטענות הבאות שקולות, כלומר אם אחת נכונה כל השאר נכונות גם כן.

(א) $B=\{u_1,...,u_n\}\subset\mathbb{R}^m$ בסיס של $\mathbb{R}^m$.

(ב) B קבוצה בת"ל מירבית (כלומר כל $v\in\mathbb{R}^m$ שנוסיף לקבוצה יהפוך אותה לתלויה לינארית).

(ג) B פורשת מזערית (כלומר אם נסיר איבר מהקבוצה היא כבר לא תהיה פורשת).

הוכחה: (א) $\Leftarrow$ **(ב)** נניח כי B בסיס, נראה כי היא קבוצה בת"ל מירבית. יהי $v\in\mathbb{R}^m$, אז כיוון ש B פורשת ניתן להציג את v כצירוף לינארי של איברי B. לכן, הקבוצה $\{u_1,...,u_n,v\}$ תלויה לינארית.

(ב) $\Leftarrow$ **(א)** נניח כי B בת"ל מירבית, נרצה להראות שהיא גם פורשת ולכן בסיס. נניח אחרת, אז קיים $v\in\mathbb{R}^m$ שאינו צ"ל של איברי B ולכן $\{u_1,...,u_n,v\}$ בת"ל, בסתירה להיות הקבוצה המקורית בת"ל מירבית.

(א) $\Leftarrow$ **(ג)** נניח כי B בסיס, נראה כי היא קבוצה פורשת מזערית. נסיר איבר כלשהו מהקבוצה, נניח את u_i. על פי טענה קודמת, כיוון שנתון ש B בת"ל אז אף איבר בה אינו ניתן להצגה כצירוף לינארי של שאר האיברים, לאחר הסרת u_i אין צירוף לינארי של האיברים הנותרים ששווה לו, ובפרט הקבוצה החדשה כבר לא פורשת.

(ג) $\Leftarrow$ **(א)** נניח כי B פורשת מזערית, נרצה להראות שהיא גם בת"ל ולכן בסיס. נניח בשלילה שהיא תלויה לינארית, אז אחד מאיברי הקבוצה ניתן להצגה כצירוף לינארי של שאר האיברים, ולכן גם אם נסיר את אותו האיבר הקבוצה תשאר פורשת, בסתירה למזעריות. לכן אף איבר אינו צירוף לינארי של שאר האיברים. ■

טענה 3.14 תהי $C = \{u_1, ..., u_n\} \subset \mathbb{R}^m$.

(א) אם $n > m$ ("יותר מדי איברים") אז C לא בלתי תלויה לינארית.

(ב) אם $n < m$ ("פחות מדי איברים") אז C לא פורשת.

הוכחה: **(א)** במערכת ההומוגנית המתאימה יהיו n משתנים ו m משוואות, כלומר יש n עמודות ו m שורות במטריצת המקדמים המצומצמת המתאימה A, ולכן קיים משתנה חופשי, ובפרט אינסוף פתרונות למערכת. כלומר הפתרון הטריוויאלי אינו הפתרון היחיד, ולכן C לא בלתי תלויה לינארית.

(ב) נתבונן שוב במטריצת המקדמים המצומצמת A, הפעם יש יותר שורות מעמודות, ובפרט בצורה המדורגת הקנונית המתאימה $\widetilde{A}$ ישנה שורת אפסים. נראה כי קיים איבר ב $\mathbb{R}^m$ שאינו ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי C. נרחיב את $\widetilde{A}$ למטריצת מקדמים מורחבת על ידי $\widetilde{b} = e_m$, כאשר ה "1" שמופיע כמקדם האחרון ב e_m מתאים לשורת האפסים שמופיעה בתחתית $\widetilde{A}$. נחזור בסדר הפוך על תהליך הדירוג, ונקבל $(A|b)$ כאשר A היא המטריצה המצומצמת המקורית, ו $b \in \mathbb{R}^m$ אינו ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי C. ■

מסקנה 3.15 אם B בסיס של $\mathbb{R}^m$ אז יש ב B בדיוק m איברים.

הוכחה: נניח בשלילה כי יש יותר איברים מ m, אז B לא בת"ל בסתירה. נניח כי יש פחות, אז B לא פורשת, בסתירה. ■

מסקנה 3.16 אם נרצה להוכיח כי קבוצה $C \subset \mathbb{R}^m$ כלשהי היא בסיס ב $\mathbb{R}^m$ מספיק להראות שתי תכונות בלבד מבין השלוש הבאות: **(א)** בת"ל **(ב)** פורשת **(ג)** יש בה בדיוק m איברים.

הוכחה: נניח למשל כי מספיק להניח **(א)** ו **(ג)**: אז B בת"ל, ולכן בהכרח יש בה לכל היותר m איברים. אבל נתון שיש לה בדיוק m איברים, ולכן זו קבוצה בת"ל מירבית, ולכן B בסיס. באופן דומה אפשר להראות שמספיק להניח **(א)** ו **(ב)**. ■

4 מרחבי מטריצות וכפל מטריצות

4.1 הגדרות ופעולות

הגדרה 4.1 נסמן את **קבוצת המטריצות** בעלות m שורות ו n עמודות עם מקדמים ממשיים על ידי $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, כלומר:

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

ישנם סימונים נפוצים אחרים, בין היתר: $\mathbb{R}^{m\times n}$ ו $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, ואפשר לחשוב על n-יה כעל איבר ב $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. לפעמים כדי להדגיש כי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ נרשום $A_{m\times n}$ או אם $v \in \mathbb{R}^n$ נרשום $v_{n\times 1}$.

תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, אז $\left(A\right)_{ij}$ הינו האיבר בנמצא בשורה ה i ובעמודה ה j (לפעמים יותר נח מלסמן a_{ij}). שתי מטריצות $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ הן שוות אם כל המקדמים שלהם שווים, כלומר לכל $1\leq i\leq m$ ולכל $1\leq j\leq n$ מתקיים $\left(A\right)_{ij}=\left(B\right)_{ij}$. שימו לב שאם שתי מטריצות אינן מאותם המימדים, אין משמעות לניסיון להשוות ביניהן.

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 5\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\ 4 & 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

הגדרה 4.2 מרחב המטריצות $M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ הינו קבוצת המטריצות המתאימה יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר ממשי המוגדרים באופן דומה לפעולות שראינו ב $\mathbb{R}^{n}$, ובפרט עבור $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ו $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\left(A+B\right)_{ij}=\left(A\right)_{ij}+\left(B\right)_{ij}$$
$$\left(\lambda A\right)_{ij}=\lambda\left(A\right)_{ij}$$

כלומר מחברים וכופלים בסקלר מקדם־מקדם.

מתכונות החיבור והכפל הממשיים מתקיים:

תכונות החיבור: יהיו $A,B,C\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, מתקיים:

- $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$ (אסוציאטיביות)
- $A+B=B+A$ (קומוטטיביות)
- קיים $0\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ כך ש $A+0=A$ (0 הינה מטריצת האפס)

תכונות הכפל בסקלר: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהיו $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, מתקיים:

- $\mu\left(\lambda A\right)=\left(\mu\lambda\right)A$.
- $\left(\mu+\lambda\right)A=\mu A+\lambda A$.
- $\lambda\left(A+B\right)=\lambda A+\lambda B$.

4.2 כפל מטריצה ב n־יה

הגדרה 4.3 יהיו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו $v \in \mathbb{R}^n$. אז מכפלת המטריצה A ב n־יה v מוגדר להיות ה m־יה המתקבלת מהצירוף הלינארי של עמודות A עם המקדמים איברי v, כלומר

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

שיטה לזכור מתי מותר לכפול ומה יוצא: "$A_{m\times n} \cdot v_{n\times 1} = w_{m\times 1}$".

דוגמה: עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ו $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

הערה: מההגדרה ניתן לקבל נוסחה לכפל מטריצה ב n־יה: עבור $v \in \mathbb{R}^n$ ו $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ כמקודם

$$Av = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}\lambda_j \end{pmatrix}$$

כאשר עבור $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ מסמנים את סכומם על ידי

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$$

בדומה נסמן סכומים של אובייקטים אחרים כמו m־יות, מטריצות וכו'.

הערה: פתרון של מערכת המשוואות הלינאריות

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + ... + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

הינו $v \in \mathbb{R}^n$ המקיים $Av = b$ כאשר $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מטריצת המקדמים המצומצמת, ו $b \in \mathbb{R}^m$ עמודת המקדמים החופשיים.

סימון: מעתה נוכל נסמן את מערכת המשוואות הליניאריות הנ"ל על ידי $Ax=b$ כאשר $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הינה n־ית המשתנים.

דוגמא: נתבונן במערכת המתאימה ל $\left(A|b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right)$. דירוג לצורה קנונית יתן

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

ולכן $S=\left\{\begin{pmatrix} s-4 \\ -2s+4 \\ s \end{pmatrix} \mid s\in\mathbb{R}\right\}$. נציב למשל $s=1$ ונקבל כי $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ מהווה פתרון, ואכן כמו שחישבנו קודם לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

וממה שראינו לכל $v\in S$ מתקיים $Av=b$.

4.3 כפל מטריצות

הגדרה 4.4 בהנתן $A\in M_{m\times p}\left(\mathbb{R}\right)$ ו $B\in M_{p\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, המטריצה $AB\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$, שנקראת **מכפלת המטריצות** A כפול B, מוגדרת באופן הבא: העמודה ה j ב AB הינה מכפלת A בעמודה ה j ב B, כלומר היא הצירוף הליניארי המתקבל מעמודות A עם מקדמים מהעמודה ה j במטריצה B.

שיטה לזכור מתי מותר לכפול ומה יוצא: "$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}=C_{m\times n}$".

דוגמה: יהיו $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. אז $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

נצפה לקבל מטריצה ב $M_{2\times 3}\left(\mathbb{R}\right)$, ואכן

$$\left(\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{First column of } AB}\quad \underbrace{1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Second column of } AB}\quad \underbrace{0\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+6\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Third column of } AB}\right)=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 4 & -5 & 24 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

הערה: מההגדרה ניתן לקבל נוסחה לכפל מטריצות: עבור $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ ו $B \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ כמקודם

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \text{"} = \text{"} \left(\begin{array}{c} \\ \longrightarrow i\text{th row of } A \longrightarrow \\ \\ \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ j\text{th column of } B \\ \downarrow \end{array}\right)$$

הרבה פעמים מכפלת מטריצות מוגדרת על פי הנוסחה, אבל חשוב להכיר את שתי ההגדרות ולעבוד איתן בהתאם לנסיבות.

דוגמה: במכפלה מהדוגמה הקודמת:

$$(AB)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$$

$$(AB)_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = 3\cdot 0 + 4\cdot 6 = 24$$

הערה: אם סדרי המטריצות אינם תואמים אין משמעות למכפלתם, למשל בדוגמה הקודמת, אין משמעות לביטוי BA.

משפט 4.5 תכונות הכפל:

1. חוק הקיבוץ: יהיו $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), B \in M_{p\times r}(\mathbb{R}), C \in M_{r\times n}(\mathbb{R})$ אז $(AB)C = A(BC)$.
2. חוק פילוג: יהיו $A \in M_{m\times p}(\mathbb{R}), B \in M_{p\times n}(\mathbb{R}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$ אז $A(B+C) = AB + AC$.
3. אין חילוף: כלומר לא בהכרח $AB = BA$ (ויתכן AB מוגדר אבל BA לא).

הוכחה: נוכיח על פי ההגדרות השונות:

1. נשווה איברים בביטויים שבני האגפים. אגף שמאל:

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}(AB)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{p}(A)_{il}(B)_{lk}\right)(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{p}(A)_{il}(B)_{lk}(C)_{kj}$$

אגף ימין:

$$A(BC) = \sum_{l=1}^{p}(A)_{il}(BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{p}(A)_{il}\left(\sum_{k=1}^{r}(B)_{lk}(C)_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}(A)_{il}(B)_{lk}(C)_{kj}$$

2. ניתן להוכיח בעזרת הנוסחה כמו עבור התכונה הקודמת. אפשר גם לנסות להוכיח באמצעות ההגדרה והשוואת האגפים: אגף שמאל: העמודה ה j של $A(B+C)$ הינה צירוף לינארי של עמודות A עם מקדמים מהעמודה ה j של $B+C$, כלומר

$$\left((B)_{1j} + (C)_{1j}\right)\begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix} + \ldots + \left((B)_{pj} + (C)_{pj}\right)\begin{pmatrix} | \\ A_p \\ | \end{pmatrix}$$

אגף ימין: העמודה ה j של $AB+BC$ הינה סכום הצירוף הלינארי של עמודות A עם מקדמים מהעמודה ה j של B והצירוף הלינארי של עמודות A עם מקדמים מהעמודה ה j של C, כלומר

$$(B)_{1j}\begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix}+(C)_{1j}\begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix}+...+(B)_{pj}\begin{pmatrix} | \\ A_p \\ | \end{pmatrix}+(C)_{pj}\begin{pmatrix} | \\ A_p \\ | \end{pmatrix}$$

ומחוקי חשבון n־יות נקבל את השוויון הדרוש.

3. אין חוק החילוף: ראשית, בהנתן A,B עבורן AB מוגדר, לא בהכרח מוגדר BA, למשל אם $A\in M_{m\times p}(\mathbb{R}), B\in M_{p\times r}(\mathbb{R})$ אבל $m\neq r$. יתרה מכך, גם אם שניהם מוגדרים, כלומר $m=r$, AB ו BA יהיו מאותו הסדר רק אם $m=r=p$ (ואחרת אין טעם להשוות). אפילו עבור $A,B\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ לא בהכרח $AB=BA$. ■

דוגמה: למשל במרחב $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ עבור $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מתקיים

$$AB=\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\neq BA=\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: אם $AB=0$ אז $A=0$ או $B=0$.

פתרון: לא נכון! דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=0$$

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: אם $AA=0$ אז $A=0$.

פתרון: לא נכון! דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

4.4 המטריצה המשוחלפת ($Transpose$)

הגדרה 4.6 תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, אז המטריצה $A^T\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, הנקראת **המטריצה המשוחלפת** של A (או פשוט A **טרנספוז**) הינה המטריצה שעמודותיה הן שורות A, ושורותיה הן עמודות A, כלומר

$$\left(A^T\right)_{ij}=(A)_{ji}$$

דוגמה: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T$.

הגדרה 4.7 מטריצה נקראת סימטרית אם $A^T = A$.

תכונות מיידיות מההגדרה:

- $\left(A^T\right)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

מסקנה 4.8 ניתן היה להגדיר כפל מטריצות גם באופן הבא: AB היא מטריצה שהשורה ה i שלה מתקבלת כצירוף לינארי של שורות B עם מקדמים מהשורה ה i של A.

הערה: סכום וכפל בסקלר של שורה נעשים מקדם־מקדם, בדומה לפעולות על עמודות, כלומר

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 & \cdots & \lambda a_n + \mu b_n \end{pmatrix}$$

דוגמה: נחזור לדוגמה שחישבנו מוקדם יותר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 4 & -5 & 24 \end{pmatrix}$$

4.5 מטריצות ריבועיות

הגדרה 4.9 מטריצה A נקראת **מטריצה ריבועית** מסדר n אם יש לה בדיוק n שורות ו n עמודות, כלומר אם $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

מעתה נסמן את קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר n על ידי $M_n(\mathbb{R})$.

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 6 & \sqrt{17} \\ \pi^2 & -\log 8 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad (9) \in M_1(\mathbb{R})$$

תכונות בסיסיות:

- סגירות לחיבור: אם $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ אז $A+B\in M_n(\mathbb{R})$ (תכונה זו מתקיימת לכל $M_{m\times n}(\mathbb{R})$).
- איבר נייטרלי ביחס לחיבור: מטריצת האפס $0\in M_n(\mathbb{R})$ מקיימת $A+0=A$ (תכונה זו נכונה לכל $M_{m\times n}(\mathbb{R})$).
- סגירות לכפל: אם $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ אז $AB\in M_n(\mathbb{R})$ (תכונה זו **לא** מתקיימת עבור $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אם $m\neq n$).
- איבר נייטרלי ביחס לכפל: קיימת מטריצה $I_n\in M_n(\mathbb{R})$ הנקראת **מטריצת היחידה** המוגדרת על ידי

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

המקיימת $I_nA=AI_n=A$ לכל $A\in M_n(\mathbb{R})$.

הערה: אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אז $I_mA=A$ ו $AI_n=A$ (אבל המכפלות בסדר ההפוך לא מוגדרות אם $m\neq n$).

הגדרה 4.10 עבור מטריצה ריבועית $A\in M_n(\mathbb{R})$ ומספר טבעי $k\in\mathbb{N}$ נגדיר את החזקה ה k של A להיות המטריצה

$$A^k:=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{ times}}\in M_n(\mathbb{R})$$

לפעמים נח להרחיב את ההגדרה למקרה $k=0$, ואז $A^0=I_n$.

דוגמאות: אם $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-1\end{pmatrix}$, אז

$$A^2-2A+5I_2=\begin{pmatrix}-5&0\\0&-5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-2\\3&-1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-2A$$

הערה: כשפותחים סוגריים בביטויים עם מטריצות יש לזכור כי אין חילופיות. לכל $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

אבל באופן כללי $AB\neq BA$ ולכן $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

ובדומה $(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2\neq A^2-B^2$.

לעומת זאת תמיד $AI_n=I_nA$ ולכן $(A+I_n)(A-I_n)=A^2-I_n$.

5 מטריצות הפיכות והמטריצה ההפכית

5.1 הגדרות ותכונות בסיסיות של מטריצה הפיכה

הגדרה 5.1 תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. נאמר כי A **הפיכה** אם קיימת מטריצה $B \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $AB = I_n$. בהמשך נראה כי אם $AB = I_n$ אז בהכרח $BA = I_n$. מטריצה B כזאת נקראת המטריצה **ההפכית** של A ונסמנה A^{-1}.

הערה: אין דבר כזה $\frac{1}{A}$!

דוגמאות:

- המטריצה $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ הפיכה. ואכן, המטריצה $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ מקיימת $AB = BA = I_2$.
- לא כל מטריצה היא הפיכה. למשל $0 \in M_n(\mathbb{R})$ אינה הפיכה, כי לכל $B \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $0B = 0 \neq I_n$.
- לא כל מטריצה $A \neq 0$ היא הפיכה, למשל $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אינה הפיכה, נוכיח זאת:

  נניח שקיימת $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ המקיימת $I_2 = AB$, כלומר

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  זה לא יתכן כמובן, כי $0 \neq 1$, ולכן המטריצה שלנו אינה הפיכה. באופן דומה ניתן להראות כי למשל $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ אינה הפיכה, כלומר גם מטריצה שאין בה בכלל איברים השווים לאפס עשויה להיות לא הפיכה.

טענה 5.2 מטריצה הפכית נקבעת ביחידות.

הוכחה: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ונניח כי $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ מקיימות $AB = BA = I_n$ וגם $AC = CA = I_n$. מחוק הקיבוץ מתקיים $C(AB) = (CA)B$, אבל

$$(CA)B = I_n B = B$$

$$C(AB) = CI_n = C$$

כלומר $B = C$. ■

טענה 5.3 יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ שתיהן הפיכות, אז AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

הוכחה: מחוק הקיבוץ מתקיים

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

ומיחידות ההפכית מתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

טענה 5.4 יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ותהי $C \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה, אז $AC = BC$ אם ורק אם $A = B$.

הוכחה: ברור שאם $A = B$ אז $AC = BC$, בלי קשה להיותה הפיכה. לכן גם

$$(AC)C^{-1} = (BC)C^{-1}$$

ומחוק הקיבוץ נקבל $A = B$. ■

טענה 5.5 תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, אז A הפיכה אם ורק אם A^T הפיכה ומתקיים $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

הוכחה: נניח A הפיכה, אז מתכונות השחלוף מתקיים $A^T\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I_n^T = I_n$. כיוון שני דומה. ■

טענה 5.6 תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ שיש לה שורת/עמודת אפסים, אז A אינה הפיכה.

הוכחה: נניח כי השורה ה i של A שורת אפסים, אז לכל $B \in M_n(\mathbb{R})$, השורה ה i של המטריצה AB היא שורת אפסים (מהגדרת המכפלה כצירוף לינארי של שורות B עם מקדמים מהשורה המתאימה ב A) ולכן בהכרח $AB \neq I_n$ ולכן לא יתכן ש A הפיכה. אם ל A יש עמודת אפסים, אז נסתכל על A^T. לה יש שורת אפסים ולכן אינה הפיכה, ועל פי הטענה הקודמת גם A אינה הפיכה. ■

הערה: כמו שראינו זה לא תנאי הכרחי, כלומר ישנן מטריצות שאינן הפיכות ואין בהן ולו אפס אחד.

תרגיל: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $A^2 - 5A + 5I_n = 0$. הראו כי $A - 2I_n$ הפיכה.

פתרון: נוסיף I_n לשני האגפים ונקבל

$$I_n = A^2 - 5A + 6I_n = (A - 2I_n)(A - 3I_n)$$

ולכן $A - 2I_n$ הפיכה ומתקיים $(A - 2I_n)^{-1} = A - 3I_n$.

5.2 מטריצות אלמנטריות

הגדרה 5.7 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ נקראת **מטריצה אלמנטרית** אם ניתן לקבל מטריצה כזו ממטריצה היחידה I_n על ידי פעולת שורות אלמנטרית אחת בלבד. נסמנן על ידי:

1. החלפת שורות i,j : $E_{i,j}^{(1)}$.

2. כפל שורה i בסקלר $\lambda \neq 0$: $E_{i,\lambda}^{(2)}$.

3. הוספת שורה j כפול סקלר λ לשורה i : $E_{i,j,\lambda}^{(3)}$.

דוגמאות: נראה את שלושת סוגי המטריצות האלמנטריות ב $M_3(\mathbb{R})$:

$$E_{2,3}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{3,\lambda}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, E_{2,1,\lambda}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

טענה 5.8 כפל מטריצה אלמנטרית $E \in M_m(\mathbb{R})$ במטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מצד שמאל שקול להפעלת הפעולה האלמנטרית המתאימה על שורות A.

הוכחה: נובע מיידית מהגדרת מכפלת המטריצות EA כמטריצה ששורה i שלה הינה הצירוף הלינארי של שורות A עם מקדמים משורה i במטריצה E. ■

דוגמה: תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ אז

$$E_{1,2}^{(1)}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$E_{1,7}^{(2)}A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
$$E_{2,1,-2}^{(3)}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מסקנה 5.9 המטריצות האלמנטריות הן הפיכות וההפיכות שלהן אלמנטריות גם כן.

הוכחה: המטריצה ההפכית מתאימה למטריצה האלמנטרית של הפעולה ההפוכה, כלומר:

1. $\left(E_{i,j}^{(1)}\right)^{-1} = E_{i,j}^{(1)}$.
2. $\left(E_{i,\lambda}^{(2)}\right)^{-1} = E_{i,\frac{1}{\lambda}}^{(2)}$.
3. $\left(E_{i,j,\lambda}^{(3)}\right)^{-1} = E_{i,j,-\lambda}^{(3)}$ ■

מסקנה 5.10 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ותהי $\widetilde{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ הצורה המדורגת קנונית של A, אז קיימות מטריצות אלמנטיות $E_1, ..., E_k \in M_m(\mathbb{R})$ כך שמתקיים

$$\widetilde{A} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$
$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \widetilde{A}$$

הערה: אלגוריתם הדירוג של גאוס קובע לכל מטריצה סדרת פעולות אלמנטריות באופן יחיד, ולפעמים יהיה נח להשתמש דווקא בה, למרות שיש עוד דרכים לדרג.

הערה: כיוון שמכפלת מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה, דירוג שורות מטריצה שקול לכפל מטריצה הפיכה משמאל.

משפט 5.11 תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, אז הטענות הבאות שקולות:

(א) A הפיכה.

(ב) למערכת ההומוגנית המתאימה יש פתרון טריוויאלי בלבד.

(ג) A שקולת שורות למטריצת היחידה I_n.

הוכחה: נוכיח את מעגל הגרירות:

(א) $\Leftarrow$ **(ב)** נניח כי A הפיכה. אז קיימת $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. מהגדרת כפל מטריצה ב n־יה, פתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה ל A הינו $v \in \mathbb{R}^n$ המקיים $Av = 0$. נכפול את שני האגפים ב A^{-1} משמאל, ונקבל $A^{-1}Av = A^{-1}0$. אבל שמאל שווה ל v, ואגף ימין שווה ל n־ית האפס, כלומר v הינו הפתרון הטריוויאלי.

(ב) $\Leftarrow$ **(ג)** נניח בשלילה כי לצורה הקנונית של A, נסמנה $\widetilde{A}$, יש עמודה ללא איבר פותח. אז למערכת ההומוגנית המתאימה יש משתנה חופשי ובפרט אינסוף פתרונות, בסתירה להנחה. לכן בכל עמודה ישנו איבר פותח. כיוון שמדובר במטריצה ריבועית, אם בכל עמודה יש איבר פותח אז הצורה הקנונית היחידה האפשרית היא מטריצת היחידה I_n.

(ג) $\Leftarrow$ **(א)** נניח כי $\widetilde{A} = I_n$, אז קיימות מטריצות אלמנטריות כך ש $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \widetilde{A}$. אגף ימין מהווה מכפלה של מטריצות הפיכות, ולכן גם A הפיכה. ■

הערה: במהלך ההוכחה הוכחנו מספר טענות חשובות:

1. A הפיכה אם ורק אם עמודותיה בסיס של $\mathbb{R}^n$.

2. כל מטריצה הפיכה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות. ישנן הצגות רבות של הפיכה כמכפלה כזאת, אך ישנה אחת "קנונית" הנובעת מאלגוריתם הדירוג של גאוס.

3. כמסקנה מכך קיבלנו שכפל מטריצה הפיכה במטריצה כלשהי משמאל, שקול להפעלת סדרת פעולות דירוג שורות על המטריצה, ובפרט $B \sim C$ (שקולת שורות) אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה A המקיימת $AB = C$.

טענה 5.12 יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $AB = I_n$. אז גם $BA = I_n$.

הוכחה: נניח $AB = I_n$ ותהי $\widetilde{A}$ הצורה הקנונית של A, אז קיימת C הפיכה כך ש $CA = \widetilde{A}$, ולכן

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = \widetilde{A}B$$

אם $\widetilde{A} \neq I_n$ אז בהכרח C לא הפיכה (כי אז בהכרח תהיה שורת אפסים ב $\widetilde{A}$ ולכן גם ב $C = \widetilde{A}B$ ובפרט C לא הפיכה), בסתירה לכך ש C הפיכה. לכן $\widetilde{A} = I_n$, ומכאן $C = I_nB = B$ וכן $BA = I_n$ כנדרש. ■

5.3 אלגוריתם הפיכת מטריצות

תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה. ראינו שמתקיים

$$I_n = \widetilde{A} = E_kE_{k-1}\cdots E_1A$$

ומהטענה לעיל בהכרח $A^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_1$ כאשר E_j הן המטריצות האלמנטריות המתאימות לפעולות הדירוג הקנוני של A. לכן, כדי לחשב את A^{-1} מספיק לדרג סימולטנית את המטריצה שלנו ואת מטריצת היחידה. כלומר לנצל את הקשר

$$E_kE_{k-1}\cdots E_1A = I_n \Longrightarrow E_kE_{k-1}\cdots E_1I_n = A^{-1}$$

כדי לקבל

$$(A|I_n) \dashrightarrow (I_n|A^{-1})$$

דוגמה:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow 2R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

ולכן $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

הערה: נשים לב שזאת בעצם הכללה של האופן שבו אנחנו פותרים מערכת משוואות לינאריות: ראינו שניתן לחשוב על פתרון של מערכת משוואות לינאריות שמטריצת המקדמים שלה נתונה על ידי $(A|b)$, כאשר $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ו $b \in \mathbb{R}^m$ כעל מציאת $c \in \mathbb{R}^n$ המקיים $Ac = b$. מציבים במטריצה, ומביאים את A לצורה קנונית $\widetilde{A}$

$$(A|b) \dashrightarrow \left(\widetilde{A}|d\right)$$

מה־m־יה d ומהצורה הקנונית $\widetilde{A}$ קל לנו להסיק את הפתרון הרצוי למערכת c.

נניח כי עבור $b_1, ..., b_k \in \mathbb{R}^m$ נהיה מעוניינים לפתור את המערכות $(A|b_j)$ בבת אחת. אז הדבר שקול למציאת מטריצה $C \in M_{n\times k}$ שתקיים $AC = B$ כאשר עמודות המטריצה B הן בדיוק אותם $b_1, ..., b_k$. נוכל להשתמש באותה השיטה שראינו למציאת מטריצה הפכית, כלומר נדרג את A לצורה הקנונית ותוך כדי נעשה את אותן הפעולות גם על שורות B, ונקבל

$$(A|B) \dashrightarrow (\tilde{A}|D)$$

מעמודות D נסיק את עמודות המטריצה שרצינו C.

אם A הפיכה ונרצה למצוא הפכית (כלומר נרצה למצוא C שמקיים $AC = I_n$), אז $B = I_n$, $\widetilde{A} = I_n$ ו $D = A^{-1} = C$.

סיכום זמני: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה ריבועית, הוכחנו כי כל הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה, כלומר קיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $AB = BA = I_n$.
2. קיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $AB = I_n$.
3. קיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $BA = I_n$.
4. למערכת ההומוגנית $(A|0)$ יש פתרון יחיד.
5. A שקולת שורות למטריצה היחידה I_n.
6. A הינה מכפלה של מטריצות אלמנטריות.
7. עמודות A קבוצה פורשת של $\mathbb{R}^n$ ובלתי תלויה לינארית, ובפרט בסיס של $\mathbb{R}^n$.
8. שורות A קבוצה פורשת של $\mathbb{R}^n$ ובלתי תלויה לינארית, ובפרט בסיס של $\mathbb{R}^n$.

הערה: הרשימה עוד תתארך בהמשך.

6 יחידת הצורה המדורגת הקנונית

משפט 6.1 לכל $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ קיימת צורה מדורגת קנונית אחת ויחידה $\widetilde{A}$.

הוכחה: הקיום של הצורה המדורגת קנונית נובע מאלגוריתם הדירוג (שיטת הנפה של גאוס). נוכיח יחידות באינדוקציה על מספר העמודות של A:

בסיס האינדוקציה: נניח $A\in M_{m\times1}\left(\mathbb{R}\right)$, כלומר A עמודה. ישנן שתי אפשרויות:

<u>אפשרות א':</u> A הינה עמודת אפסים. במקרה כזה כל פעולה אלמנטרית לא תשנה את A, ולכן פשוט $A=\widetilde{A}$.

<u>אפשרות ב':</u> קיים לפחות איבר אחד שונה מאפס ב A. אז בהכרח יהיה ב A איבר פותח, ולכן בהכרח ב $\widetilde{A}$ יש 1 בשורה הראשונה ואפסים בשאר השורות.

הנחת האינדוקציה: נניח כי לכל מטריצה $A\in M_{m\times(k-1)}\left(\mathbb{R}\right)$ ישנה צורה קנונית יחידה.

צעד האינדוקציה: נוכיח כי לכל מטריצה $A\in M_{m\times k}\left(\mathbb{R}\right)$ ישנה צורה קנונית יחידה. נסמן ב A' את המטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת העמודה האחרונה שלה. אז $A'\in M_{m\times(k-1)}\left(\mathbb{R}\right)$, ולכן על פי הנחת האינדוקציה קיימת לה צורה מדורגת יחידה $\widetilde{A'}$. נניח כי ל A ישנן שתי צורות קנוניות B ו C, אז בפרט $A\sim B$ וגם $A\sim C$ ולכן כפי שראינו $B\sim C$. מאלגוריתם הדירוג ומהנחת האינדוקציה נובע כי בהכרח $k-1$ העמודות הראשונות של B ושל C זהות ומתקיים

$$B=\left(\begin{array}{cc}\underbrace{\begin{matrix} & \\ & \widetilde{A'} \\ & \end{matrix}}_{k-1\text{ columns}} & \underbrace{\begin{matrix} b_{1k}\\ \vdots\\ b_{mk}\end{matrix}}_{b}\end{array}\right),\ C=\left(\begin{array}{cc}\underbrace{\begin{matrix} & \\ & \widetilde{A'} \\ & \end{matrix}}_{k-1\text{ columns}} & \underbrace{\begin{matrix} c_{1k}\\ \vdots\\ c_{mk}\end{matrix}}_{c}\end{array}\right)$$

נחשוב על B ועל C כעל מטריצות מקדמים מורחבות, כלומר נתבונן במערכות $\left(\widetilde{A'}|b\right)$ ו $\left(\widetilde{A'}|c\right)$. כיוון שהמערכות הללו שקולות שורות אז לשתיהן אותה קבוצת פתרונות $S\subset\mathbb{R}^{k-1}$. ישנן שתי אפשרויות:

<u>אפשרות א':</u> S קבוצה ריקה. אז בהכרח ישנה שורת סתירה במערכות הללו, כלומר בעמודה האחרונה של B ו C ישנו איבר פותח. כיוון ש B ו C מדורגות קנונית, האיבר הזה בהכרח נמצא בשורה שמתחת לאיבר הפותח האחרון ב $\widetilde{A'}$ ושאר העמודה אפסים ולכן $B=C$.

<u>אפשרות ב':</u> S קבוצה לא ריקה. אז קיים $v\in S$ המקיים

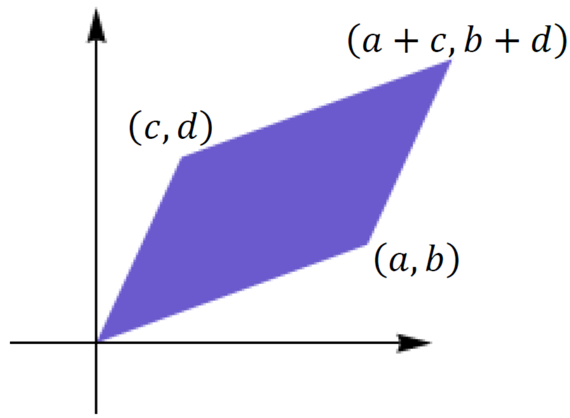
$$b=\widetilde{A'}v=c$$

ולכן $b=c$, ומכאן $B=C$. ∎

7 דטרמיננטות

7.1 מוטיבציה - שטח של מקבילית במישור (דיון לא פורמלי)

יהיו $\left(\begin{array}{c}a\\b\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}c\\d\end{array}\right)\in\mathbb{R}^{2}$ ונחשוב לרגע על $\mathbb{R}^{2}$ כעל המישור, ועל שני האיברים הללו כעל נקודות בו. המקבילית הנוצרת על ידי שני האיברים הללו היא המקבילית שקודקודיה בנקודות $\left(c,d\right),\left(a+c,b+d\right),\left(a,b\right),\left(0,0\right)$:

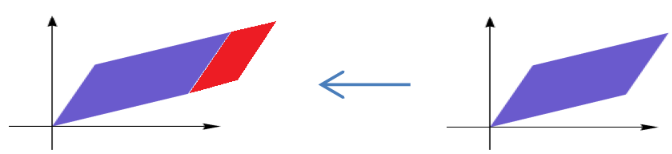


האוריינטציה של המקבילית היא $+1$ או -1, תלוי בסדר שבו נמצאות הנקודות היוצרות. השטח המסומן של המקבילית הינו השטח הרגיל כפול האוריינטציה. נגדיר את המטריצה המתאימה לשני איברי $\mathbb{R}^2$ להיות זאת ששורותיה הן האיברים, כלומר $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ונגדיר פונקציה $f:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ שמקבלת מטריצה ומתאימה לה את השטח המכוון של המקבילית.

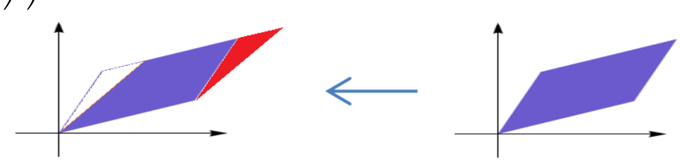
נתבונן על כמה תכונות של הפונקציה הזאת:

- אם נחליף את שורות המטריצה, נשנה אוריינטציה ולכן סימן, כלומר $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=-f\left(\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}\right)$.

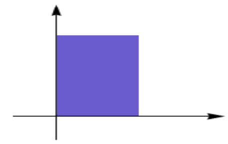
- אם נכפול את אחת מהשורות בקבוע, השטח כולו יוכפל באותו הקבוע $f\left(\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\lambda f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$.



- אם נוסיף לשורה כלשהי שורה אחרת כפול קבוע השטח לא ישתנה $f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c+\lambda a&d+\lambda b\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$.

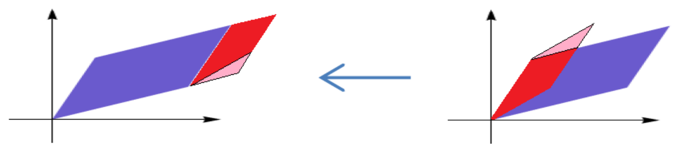


- המקבילית המיוצגת על ידי I_2 היא פשוט ריבוע היחידה, ולכן $f\left(I_2\right)=1$.

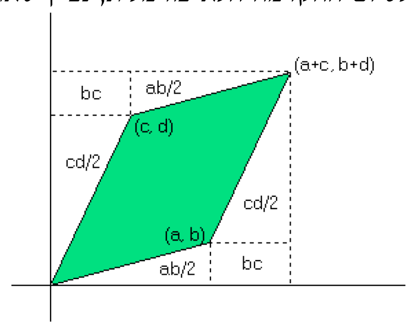


כפי שנראה עוד רגע ארבע התכונות הללו יספיקו לנו כדי להגדיר פונקציה על מטריצות ריבועיות מסדר n, פונקציה לה נקרא דטרמיננטה. נשים לב גם לתכונות הבאות, שיהיו חשובות לנו:

- אם השורות זהות, אחת מהן שורת אפסים או באופן כללי תלויות לינארית, אז המקבילית מנוונת במובן של "חד מימדית" ולכן במקרה כזה $f\left(A\right)=0$.
- חיבוריות לפי שורה, כלומר $f\left(\left(\begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right)=f\left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right)+f\left(\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right)$



לסיום ההקדמה הלא פורמלית, נציין שאת השטח מחשבים בעזרת הציור:



כלומר $f\left(\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right)=\left(a+c\right)\left(b+d\right)-2\left(\frac{ab}{2}+\frac{cd}{2}+bc\right)=ad-bc$.

7.2 הגדרת פונקציית דטרמיננטה וחישובים ראשונים

הגדרה 7.1 יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהי פונקציה $D_n:M_n\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$.

הפונקציה D_n נקראת **דטרמיננטה** אם היא המקיימת את ארבע התכונות הבאות:

1. $D_n\left(E_{i,j}^{(1)}A\right)=-D_n\left(A\right)$ כלומר החלפת שורות הופכת סימן.
2. $D_n\left(E_{i,\lambda}^{(2)}A\right)=\lambda D_n\left(A\right)$ כלומר כפל שורה בסקלר כופל את הביטוי באותו הסקלר.
3. $D_n\left(E_{i,j,\lambda}^{(3)}A\right)=D_n\left(A\right)$ כלומר הוספת שורה כפול סקלר לשורה אחרת משאירה את הביטוי כפי שהיה.

4. $D_n\left(I_n\right)=1$ כלומר הפונקציה מחזירה 1 על מטריצת היחידה.

דוגמה: נתבונן בפונקציה $f:M_2\left(\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)\right)=ad-bc$$

ונראה שהיא דטרמיננטה, כלומר נראה שאכן יש ל f את התכונות הנדרשות:

1. החלפת שורות הופכת סימן:

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} c & d\\ a & b \end{array}\right)\right)=cb-da=-\left(ad-bc\right)=-f\left(\left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)\right)$$

2. כפל שורה בסקלר λ כופל את הביטוי בλ:

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} \lambda a & \lambda b\\ c & d \end{array}\right)\right)=\lambda ad-\lambda bc=\lambda\left(ad-bc\right)=\lambda f\left(\left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)\right)$$

3. הוספת שורה כפול λ לשורה אחרת משאירה את הביטוי כפי שהיה:

$$f\left(\left(\begin{array}{cc} a+\lambda c & b+\lambda d\\ c & d \end{array}\right)\right)=\left(a+\lambda c\right)d-\left(b+\lambda d\right)c=ad-bc=f\left(\left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)\right)$$

4. הפונקציה מחזירה 1 על מטריצת היחידה:

$$f\left(I_2\right)=f\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)\right)=1$$

הערה: על פניו לא ברור לנו כרגע שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיימת פונקציית דטרמיננטה, ואם קיימת אם היא יחידה. בהמשך נראה שזה אכן המצב, ונסמן את הפונקציה f מהדוגמה לעיל על ידי $\det$.

טענה 7.2 עבור מטריצות אלמנטריות ב $M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים:

1. . $D_n\left(E_{i,j}^{(1)}\right)=-1$.
2. $D_n\left(E_{i,\lambda}^{(2)}\right)=\lambda$.
3. $D_n\left(E_{i,j,\lambda}^{(3)}\right)=1$.

הוכחה: נובע מיידית מההגדרה על ידי הצבת $A=I_n$ ושימוש בכך שהגדרנו $D_n\left(I_n\right)=1$. ■

מסקנה 7.3 אם $A,E\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ כאשר E מטריצה אלמנטרית, אז $D_n\left(EA\right)=D_n\left(E\right)D_n\left(A\right)$.

7.3 תכונות דרמיננטה

טענה 7.4 אם ל A יש שתי שורות זהות אז $D_n(A)=0$.

הוכחה: נניח כי שורות i,j זהות. אז $A=E_{i,j}^{(1)}A$ ולכן

$$D_n(A)=D_n\left(E_{i,j}^{(1)}A\right)=-D_n(A)$$

קילבנו $2D_n(A)=0$, ומכך נובע $D_n(A)=0$. ■

טענה 7.5 אם ל A יש שורת אפסים אז $D_n(A)=0$.

הוכחה: נניח כי שורה i הינה שורת אפסים. אז למשל $A=E_{i,2}^{(2)}A$ ולכן

$$D_n(A)=D_n\left(E_{i,2}^{(2)}A\right)=2D_n(A)$$

ומכאן $D_n(A)=0$. ■

דוגמאות: עבור פונקצית הדטרמיננטה f שהגדרנו על $M_2(\mathbb{R})$

$$f\left(\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}\right)=0-0=0$$
$$f\left(\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}\right)=6-6=0$$

טענה 7.6 A הפיכה אם ורק אם $D_n(A)\neq 0$.

הוכחה: נניח כי $\widetilde{A}$ הצורה המדורגת קנונית של A, כלומר $\widetilde{A}=E_k\cdots E_1A$ כאשר $E_1,...,E_k$ מטריצות אלמנטריות. לכן תוך שימוש חוזר במסקנה קודמת

$$D_n\left(\widetilde{A}\right)=D_n(E_k\cdots E_1A)=D_n(E_k)\,D_n(E_{k-1}\cdots E_1A)=..=\underbrace{D_n(E_k)\cdots D_n(E_1)}_{\neq 0}D_n(A)$$

ולכן $D_n(A)=0$ אם ורק אם $D_n\left(\widetilde{A}\right)=0$. כעת אם A הפיכה, אז $\widetilde{A}=I_n$ ולכן $D_n\left(\widetilde{A}\right)=1$ ובפרט $D_n(A)\neq 0$. אם $D_n(A)\neq 0$ אז נניח בשלילה כי A לא הפיכה. לכן ב $\widetilde{A}$ ישנה שורת אפסים ולכן לפי טענה קודמת $D_n\left(\widetilde{A}\right)=0$ ולכן גם $D_n(A)=0$ בסתירה להנחה. ■

מסקנה 7.7 כיוון שאם A הפיכה אז $\widetilde{A}=I_n$, כדי לחשב את הדטרמיננטה של A מספיק לעקוב אחרי צעדי הדירוג.

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftarrow\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$I_n=\widetilde{A}=E^{(3)}_{1,2,-\frac{1}{2}}\cdot E^{(2)}_{2,2}\cdot E^{(3)}_{2,1,-3}\cdot E^{(2)}_{1,\frac{1}{2}}A$$

ולכן

$$1=D_2\left(I_2\right)=D_2\left(E^{(3)}_{1,2,-\frac{1}{2}}\cdot E^{(2)}_{2,2}\cdot E^{(3)}_{2,1,-3}\cdot E^{(2)}_{1,\frac{1}{2}}A\right)=1\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot D_2\left(A\right)$$

כלומר $D_2\left(A\right)=1$ (ועבור f כמקודם גם כן נקבל $f\left(A\right)=1$).

טענה 7.8 אם A מטריצה **משולשית עליונה**, כלומר

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

אז $D_n\left(A\right)$ שווה למכפלת איברי האלכסון, כלומר $D_n\left(A\right)=a_{11}\cdots a_{nn}$.

הוכחה: אם אחד מאיברי האלכסון מתאפסים, אז כשנדרג את המטריצה בהכרח לא יהיה איבר פותח בעמודה המתאימה, כלומר המטריצה לא תהיה הפיכה ולכן $D_n\left(A\right)=0$ וזה מסתדר, כי גם מכפלת איברי האלכסון בהכרח מתאפסת. אחרת נוכל להשתמש בפעולות האלמנטריות מהסוג השני כדי לקבל

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}=E^{(2)}_{1,a_{11}}\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}=\ldots=E^{(2)}_{1,a_{11}}\cdots E^{(2)}_{n,a_{nn}}\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פעולות הדירוג הנוספות הנדרשות הן מהסוג השלישי בלבד, והן לא משפיעות על הדטרמיננטה, והצורה הקנונית היא I_n. לכן

$$D_n\left(A\right)=D_n\left(E^{(2)}_{1,a_{11}}\cdots E^{(2)}_{n,a_{nn}}\right)D_n\left(I_n\right)=a_{11}\cdots a_{nn}$$

כפי שרצינו להוכיח. ■

דוגמה: עבור פונקצית הדטרמיננטה f שהגדרנו על $M_2\left(\mathbb{R}\right)$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)=2\cdot 4-9\cdot 0=2\cdot 4$$

טענה 7.9 הדטרמיננטה הינה **פונקציה כפלית,** כלומר לכל $A,B\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים $D_n\left(AB\right)=D_n\left(A\right)D_n\left(B\right)$.

הוכחה: אם A הפיכה ניתן להציג אותה כמכפלת מטריצות אלמנטריות, ואז תוך שימוש במסקנה קודמת

$$\begin{aligned}D_n\left(AB\right)&=D_n\left(E_1\cdots E_kB\right)=D_n\left(E_1\right)\cdots D_n\left(E_k\right)D_n\left(B\right)\\&=D_n\left(E_1\cdots E_k\right)D_n\left(B\right)=D_n\left(A\right)D_n\left(B\right)\end{aligned}$$

אחרת, A לא הפיכה ולכן AB לא הפיכה (ראו הסבר בסוף ההוכחה), ובפרט $D_n\left(AB\right)=0=D_n\left(A\right)D_n\left(B\right)$.
הסבר לכך שאם A לא הפיכה אז AB לא הפיכה: אם A לא הפיכה גם A^T לא הפיכה. נראה שאז גם B^TA^T לא הפיכה – ואכן אם A^T לא הפיכה אז קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת $A^Tx=0$, ולכן הוא מהווה פתרון לא טריוויאלי גם למערכת $B^TA^Tx=0$, כיוון ש $\left(B^TA^T\right)x=B^T\underbrace{\left(A^Tx\right)}_{=0}=0$. כלומר B^TA^T לא הפיכה ולכן גם $AB=\left(B^TA^T\right)^T$ לא הפיכה. ■

דוגמה: עבור הפונקציה f שהגדרנו מקודם

$$\begin{pmatrix}2&9\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&40\\12&16\end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}2&9\\0&4\end{pmatrix}\right)}_{=8}\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)}_{=-2}=\underbrace{f\left(\begin{pmatrix}29&40\\12&16\end{pmatrix}\right)}_{=29\cdot16-40\cdot12=-16}$$

מסקנה 7.10 אם A הפיכה אז

$$D_n\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{D_n\left(A\right)}$$

דוגמה: עבור פונקצית הדטרמיננטה f שהגדרנו

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים

$$f\left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)=-2,\ \ f\left(\begin{pmatrix}-2&1\\1.5&-0.5\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{2}$$

טענה 7.11 לכל $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $D_n\left(A^T\right) = D_n(A)$.

הוכחה: אם A לא הפיכה אז גם A^T לא הפיכה ואז הדטרמיננטות מתאפסות. נניח כעת כי A הפיכה, ונתבונן במטריצות האלמנטריות שעבורן מתקיים $\left(E_{i,j}^{(1)}\right)^T = E_{i,j}^{(1)}$, $\left(E_{i,\lambda}^{(2)}\right)^T = E_{i,\lambda}^{(2)}$, $\left(E_{i,j,\lambda}^{(3)}\right)^T = E_{j,i,\lambda}^{(3)}$. לכן לכל E אלמנטרית $D_n\left(E^T\right) = D_n(E)$. כיוון שאם $A = E_1 \cdots E_k$ אז $A^T = E_k^T \cdots E_1^T$ נקבל את הנדרש. ■

דוגמה: עבור אותה f שהגדרנו

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right) = -2$$

מסקנה 7.12 כל התכונות של הדרמיננטה הקשורות לשורות, נכונות גם עבור עמודות ולהיפך. בפרט, אם ישנה עמודת אפסים, שתי עמודות שוות או באופן כללי יותר העמודות תלויות לינארית, אז הדטרמיננטה היא אפס.

טענה 7.13 הדטרמיננטה הינה **חיבורית לפי שורה אחרונה**, כלומר

$$D_n\left(\begin{pmatrix} - & A_1 & - \\ & \vdots & \\ - & A_{n-1} & - \\ - & B_n + C_n & - \end{pmatrix}\right) = D_n\left(\begin{pmatrix} - & A_1 & - \\ & \vdots & \\ - & A_{n-1} & - \\ - & B_n & - \end{pmatrix}\right) + D_n\left(\begin{pmatrix} - & A_1 & - \\ & \vdots & \\ - & A_{n-1} & - \\ - & C_n & - \end{pmatrix}\right)$$

הוכחה: כל השורות פרט לאחרונה זהות ולכן, דירוג $n-1$ השורות הראשונות שלהן יתן בלוק זהה עם $n-1$ שורות ו n עמודות המדורג דירוג קנוני. אם בבלוק הזה אין $n-1$ איברים פותחים אז מראש המטריצות כולן לא הפיכות ולכן כל הדטרמיננטות הן אפס. אחרת, על ידי החלפת עמודות במקרה הצורך, נקבל מטריצות מהצורה

$$A_{sum} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \\ - & & B_n + C_n & & - \end{pmatrix}, A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \\ - & & B_n & & - \end{pmatrix}, A_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \\ - & & C_n & & - \end{pmatrix}$$

כדי להוכיח את הטענה מספיק להראות כי $D_n(A_{sum}) = D_n(A_B) + D_n(A_C)$, כי אז גם השוויון המקורי יתקבל כיוון שצעדי הדירוג היו זהים בכולן. כדי לחשב את הדרמיננטות הללו נדרג בעזרת פעולות אלמנטריות מהסוג השלישי עד שנקבל מטריצה משולשית עליונה, והדטרמיננטה שלה היא מכפלת איבר האלכסון, שבמקרה הזה יהיה בדיוק האיבר במקום ה n,n.

לכן, אם $B_n = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ ו $C_n = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$, אז מתקיים

$$D_n(A_B) = b_n - b_1\alpha_1 - ... - b_{n-1}\alpha_{n-1}$$

$$D_n(A_C) = c_n - c_1\alpha_1 - ... - c_{n-1}\alpha_{n-1}$$

$$D_n(A_{sum}) = (b_n + c_n) - (b_1 + c_1)\alpha_1 - (b_{n-1} + c_{n-1})\alpha_{n-1} = D_n(A_B) + D_n(A_C)$$

■

הערה: מהתכונות לעיל מקבלים חיבוריות לפי כל שורה, ובדומה לפי כל עמודה.

הערה: זה **לא** אומר $D_n(A+B) = D_n(A) + D_n(B)$.

דוגמה: עבור פונקצית הדטרמיננטה f, היא חיבורית לפי עמודה ראשונה

$$\underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 2+3 & 4 \\ 1-2 & 2 \end{pmatrix}\right)}_{5\cdot 2-4\cdot(-1)=14} = \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)}_{2\cdot 2-4\cdot 1=0} + \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right)}_{3\cdot 2-4\cdot(-2)=14}$$

אבל הדטרמיננטה אינה פונקציה חיבורית:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

ומתקיים

$$\underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)}_{=8} + \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)}_{=-2} \neq \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\right)}_{=3\cdot 8-11\cdot 3=-9}$$

משפט 7.14 לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימת ויחידה פונקציה דטרמיננטה D_n.

הוכחה: יחידות: נניח כי יש שתי פונקציות דטרמיננטה מסדר n, נסמנן $f_1, f_2 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. אם A לא הפיכה $f_1(A) = f_2(A) = 0$. אחרת, נרשום את A כמכפלה של אלמנטריות. כיוון שכל פונקצית דטרמיננטה מחזירה את אותם הערכים על מטריצות אלמנטריות, וכיוון שפונקצית דטרמיננטה היא כפלית, בהכרח $f_1(A) = f_2(A)$.

קיום: בהמשך ניתן נוסחה לחישוב דטרמיננטה מכל סדר, אבל לא נוכיח שהיא אכן עונה על התנאים באופן כללי (עשינו את זה עבור $n=2$ ונעשה את זה ל $n=3$ בתרגיל בית). בכל מקרה - קיימת דטרמיננטה. ■

סימון: עכשיו שהוכחנו שלכל סדר n יש פונקציית דטרמיננטה והיא יחידה, אפשר לדבר על **ה**דטרמיננטה של מטריצה A. מעתה במקום D_n נסמן את הדטרמיננטה על ידי $\det A$ או $|A|$. במקרה שלא ברור הסדר של המטריצה נציין זאת מפורשות.

7.4 פיתוח לפי שורה ופיתוח לפי עמודה

הגדרה 7.15 תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. המינור ה i,j של A הינו המטריצה המתבקלת ממחיקת שורה i ועמודה j במטריצה A.
נסמן את המינור ה i,j על ידי $M_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

דוגמה: עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

יש תשעה מינורים (כמספר המקדמים ב A) למשל $M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

משפט 7.16 (קיום דטרמיננטה ־ ללא הוכחה) הפונקציה מ $M_n(\mathbb{R})$ ל $\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$A \longmapsto \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det M_{1j}$$

הינה פונקצית דטרמיננטה. הביטוי הנ"ל נקרא **פיתוח לפי שורה ראשונה.**

דוגמה: עבור מטריצות ריבועיות מסדר 2 מתקיים

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

וראינו שזאת פונקציית דטרמיננטה.

דוגמה: עבור מטריצות ריבועיות מסדר 3 מתקיים

$$\det A = a_{11} \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + a_{13} \det M_{13} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \det M_{1j}$$

וחישוב כל הגורמים המופיעים בנוסחה נותן

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$= a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - eg)$$

ובתרגיל תראו שזאת באמת פונקציית דטרמיננטה.

משפט 7.17 ניתן לחשב את הדטרמיננטה גם על פי הנוסחה **לפיתוח לפי שורה** i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det M_{ij}$$

ולפי הנוסחה **לפיתוח לפי עמודה** j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det M_{ij}$$

הערה: כדי להוכיח את הנוסחאות הנ"ל מראים שמוגדרות על פי אגף ימין כולן פונקציות דטרמיננטה, ומיחידות כולן שוות.

הערה: כשמפתחים לפי שורה אז i קבוע ו j רץ על פני העמודות (כי אנחנו עוברים על כל השורה ה i) וכשמפתחים לפי עמודה אז j קבוע ו i רץ על כל השורות. נבחר לפי מה לפתח לפי המטריצה לה נחשב דטרמיננטה.

דוגמה: נחשב בכמה דרכים שונות את

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- על ידי דירוג לצורה משולשית

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1}{=} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \overset{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2}R_2}{=} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot -\frac{3}{2} = -3$$

- פיתוח לפי שורה ראשונה

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} - 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=0} + 3 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=-1} = -3$$

- פיתוח לפי עמודה שלישית

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=-1} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

הערה: מהנוסחאות לעיל עולה (ואפשר להוכיח באינדוקציה) שהדטרמיננטה מסדר n היא סכום של מכפלות, כל אחת מהן של n איברים המהווים בחירה של איבר אחד מכל שורה ומכל עמודה במטריצה. ישנן $n!$ מכפלות, חצי מהן מופיעות עם סימן פלוס וחצי עם סימן מינוס.

תרגיל: לכל $n \in \mathbb{N}$ חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ לה 1 על האלכסון הראשי, -1 על האלכסון שמתחתיו ו 1 על העמודה האחרונה

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: נסמן $d_n = \det A_n$ ונפתור את השאלה באינדוקציה על n. כדי להבין מה אנחנו מנסים להוכיח נתבונן בכמה צעדים ראשונים, "ננחש" נוסחה כללית ונוכיח אותה באינדוקציה. במקרה שלנו $d_1 = \det(1) = 1$ ובנוסף

$$d_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,\ d_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

נוכיח אם כן $d_n = n$. מהחישוב של d_3, כשפיתחנו לפי שורה ראשונה קיבלנו שהביטוי תלוי ב d_2. אם האיבר d_n תלוי ב d_{n-1} אומרים שהסדרה d_n היא רקורסיבית.

נמצא את כלל הרקורסיה: נתחיל מלפתח את d_n לפי שורה ראשונה

$$d_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=d_{n-1}} + (-1)^{1+n} \underbrace{\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=(-1)^{n-1}}$$

$$= d_{n-1} + (-1)^{1+n} (-1)^{n-1} = d_{n-1} + (-1)^{2n} = d_{n-1} + 1$$

כעת נוכיח באינדוקציה ש $d_n = n$: בסיס: $d_1 = 1$, הנחה: $d_{n-1} = n-1$, צעד: נובע מכלל הרקורסיה

$$d_n = d_{n-1} + 1 = n - 1 + 1 = n$$

תרגיל: חשבו את הדטרמיננטה מהתרגיל הקודם בעזרת דירוג.

7.5 כלל קרמר והמטריצה המצורפת ($Adjugate$)

בהנתן מטריצה הפיכה, כלל קרמר והמטריצה המצורפת מספקים נוסחה לפתרון של מערכת משוואות שמתאימה למטריצה ומטריצה הופכית למטריצה הנתונה באמצעות חישובי דטרמיננטות בלבד. נתחיל מכלל קרמר:

משפט 7.18 (כלל קרמר) תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה הפיכה, ותהי $b \in \mathbb{R}^n$. נסמן את עמודות A על ידי $A_1, ..., A_n$, ונסמן את B_j להיות המטריצה המתקבלת מ A על ידי החלפת עמודה j ב b, כלומר

$$B_j = \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_1 & \cdots & b & \cdots & A_n \\ | & & \underbrace{|}_{j'th\, column} & & | \end{pmatrix}$$

הפתרון היחיד של המערכת $Ax = b$, שנסמנו $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, נתון על ידי הנוסחה $c_j = \frac{\det B_j}{\det A}$.

הערה: ראינו כבר שלמערכת כזאת יש פתרון יחיד. הנוסחה מוגדרת היטב כי A הפיכה ולכן המכנה שונה מאפס.

דוגמה: נפתור את המערכת $Ax = b$ עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ בעזרת כלל קרמר. המטריצות הדרושות הן

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטות הן:

$$\det A = 1, \det B_1 = 1, \det B_2 = 2$$

ולכן $c_1 = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{1}{1}$, $c_2 = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{2}{1}$. כלומר $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הפתרון הדרוש, והוא אכן מהווה פתרון.

הוכחה: (הוכחת כלל קרמר) אנחנו כבר יודעים שקיים פתרון אחד c, ופתרון זה מקיים

$$b = A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} | \\ A_1 \\ | \end{pmatrix} + ... + c_n \begin{pmatrix} | \\ A_2 \\ | \end{pmatrix}$$

לכן

$$\det B_j = \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_1 & \cdots & b & \cdots & A_n \\ | & & \underbrace{|}_{j'th\,column} & & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_1 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i A_i & \cdots & A_n \\ | & & \underbrace{|}_{j'th\,column} & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_1 & \cdots & c_i A_i & \cdots & A_n \\ | & & \underbrace{|}_{j'th\,column} & & | \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \det\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_n \\ | & & \underbrace{|}_{j'th\,column} & & | \end{pmatrix}$$

לכל $i \neq j$ הדטרמיננטה מתאפסת (כי עמודות i ו j זהות), ועבור $i = j$ נקבל בדיוק את המטריצה המקורית A, ולכן

$$\det B_j = c_j \det A$$

■

דוגמה: כדי להבהיר את ההוכחה נחזור עליה עבור B_1 כפי שמופיעה בדוגמה הקודמת: אז

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = b = A\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \det B_1 = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ &= c_1\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=\det A} + c_2\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{=0} = c_1 \det A \end{aligned}$$

כלומר $c_1 = \frac{\det B_1}{\det A}$, ובדומה עבור c_2.

הגדרה 7.19 תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$, ויהי M_{ij} המינור ה ij (כלומר המטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה i ועמודה j). המטריצה המצורפת ל A היא המטריצה $\mathrm{adj}A \in M_n(\mathbb{R})$ שאיברה הכללי נתון על ידי הנוסחה

$$(\mathrm{adj}A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji}$$

דוגמה:

$$\mathbf{adj}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}1&3\\1&0\end{pmatrix}\\-\det\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}\\\det\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}&-\det\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}&\det\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&-3\\0&-3&0\\-1&-3&2\end{pmatrix}$$

תכונות של המטריצה המצורפת: מתקיים

1. $\mathrm{adj}I_n=I_n$.
2. $\mathrm{adj}AB=\mathrm{adj}A\mathrm{adj}B$.
3. $\mathrm{adj}A^T=(\mathrm{adj}A)^T$.
4. $\det(\mathrm{adj}A)=(\det A)^{n-1}$.

משפט 7.20 לכל $A\in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$A\mathrm{adj}A=\det A\cdot I_n$$

ובפרט אם A הפיכה אז

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A$$

דוגמה: חישבנו את הדטרמיננטה של המטריצה מהדוגמה הקודמת, ויצא -3. בדיקה ישירה מראה שאכן

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0&6&-3\\0&-3&0\\-1&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&1&0\\\frac{1}{3}&1&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$$

תרגיל: תהי $A\in M_n(\mathbb{Z})$, כלומר כל מקדמי A שלמים. הוכיחו כי $\det A=\pm1$ אם ורק אם A הפיכה וכן $A^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})$.

פתרון: $(\Leftarrow)$ מהנתון $\det A\neq 0$ ולכן היא הפיכה. על פי הנוסחה לעיל מתקיים

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A=\pm\mathrm{adj}A$$

כיוון שמקדמי $\mathrm{adj}A$ דטרמיננטות של מינורים של A בהכרח כולם גם הם שלמים, ולכן כל מקדמי A^{-1} שלמים כנדרש.

$(\Rightarrow)$ כמו שראינו, עבור מטריצה עם מקדמים שלמים מתקיים $\det A \in \mathbb{Z}$ וולכן מההנחה גם $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$. בנוסף נזכור כי

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

ולכן בהכרח $\det A = \pm 1$, כי לכל שלם אחר ההפכי שלו אינו שלם.

8 שדות ומבנים אלגבריים

8.1 הגדרות ודוגמאות

כשדיברנו על שדה הממשיים כעל $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל, מנינו תכונות של הקבוצה והפעולות הללו ־ סגירות לפעולות, ניטרליים לפעולות, קיום נגדי והופכי, חוקי חילוף וקיבוץ, חוק הפילוג. באופן כללי, אם על קבוצה כלשהי מוגדרות פעולות חיבור וכפל, ואם כל התכונות שמנינו מתקיימות, אז הקבוצה נקראת **שדה**. כשנרצה לדבר על שדה כלשהו בלי להתייחס לאחד ספציפי, נסמן אותו ב $\mathbb{F}$. למען הסדר הטוב נרשום פה את אקסיומות השדה באופן מסודר.

הגדרה 8.1 תהי $\mathbb{F}$ קבוצה עליה מוגדרות פעולת חיבור ופעולת כפל. אז $\mathbb{F}$ **שדה** אם מתקיימות התכונות הבאות:
תכונות ביחס לפעולת החיבור $(+)$:

- סגירות לחיבור: $a \in \mathbb{F},\, b \in \mathbb{F} \implies (a+b) \in \mathbb{F}$.
- קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור (איבר האפס 0): לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $a + 0 = a$.
- סגירות לאיבר נגדי ביחס לחיבור: לכל $a \in \mathbb{F}$ קיים $b \in \mathbb{F}$ המקיים $a + b = 0$. מסמנים $b = -a$.
- חוק החילוף (קומוטטיביות) $a + b = b + a$ וחוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) $(a+b)+c = a+(b+c)$.

תכונות ביחס לפעולת הכפל $(\cdot)$:

- סגירות לכפל: $a \in \mathbb{F},\, b \in \mathbb{F} \implies (a \cdot b) \in \mathbb{F}$.
- קיום איבר ניטרלי ביחס לכפל (איבר היחידה 1): לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $a \cdot 1 = a$.
- סגירות לאיבר הופכי ביחס לכפל: לכל $0 \neq a \in \mathbb{F}$ קיים $b \in \mathbb{F}$ המקיים $a \cdot b = 1$. מסמנים $b = a^{-1}$.
- חוק החילוף $a \cdot b = b \cdot a$ וחוק הקיבוץ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

תכונה משותפת לשתי הפעולות:

- חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

דוגמאות: ישנם שדות רבים, חלקם סופיים וחלקם אינסופיים, נתמקד במספר דוגמאות חשובות:

- שדה הממשיים $\mathbb{R}$ הינו שדה אינסופי, ובדומה שדה הרציונליים $\mathbb{Q}$ הינו שדה אינסופי.
- הקבוצה $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ עם פעולות הכפל והחיבור הנתונות על ידי הכפל והחיבור הרגילים ולקיחת שארית חלוקה ב 2, כלומר על ידי הטבלאות הבאות:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ניתן להוכיח כי כל תכונות השדה מתקיימות, למשל $1^{-1}=1$ כלומר ההפכי של 1 הוא 1, וכן $-1=1$, כלומר הנגדי של 1 הוא 1. בנוסף 1 הוא הניטרלי לכפל ו 0 הוא הניטרלי לחיבור. זהו השדה הקטן ביותר, שכן על האיבר הניטרלי לחיבור להיות שונה מהניטרלי לכפל ולכן יש לפחות שני איברים.

- באופן דומה, ניתן להגדיר $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$ על ידי

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ולהראות שגם $\mathbb{Z}_3$ שדה, ובדומה לכל p ראשוני מתקיים ש $\mathbb{Z}_p$ שדה (הם נקראים שדות שארית וכולם כמובן שדות סופיים). באופן כללי לכל חזקה של מספר ראשוני p^k יש שדה עם p^k איברים, אבל לא נעסוק בהם בקורס.

- שדה המרוכבים $\mathbb{C}$: נסמן i להיות ביטוי המקיים $i^2=-1$. i נקרא מספר מדומה (הוא לא מספר ממשי). נגדיר

$$\mathbb{C}=\{a+bi|\, a,b\in\mathbb{R}\}$$

עם הפעולות:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i$$
$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$$

אז $\mathbb{C}$ שדה. האיבר הניטרלי לחיבור הוא $0+0i=0$ והניטרלי לכפל הוא $1+0i=1$. לכל $a+bi\in\mathbb{C}$ יש נגדי

$$-(a+bi)=-a+(-b)\,i$$

ולכל $a+bi\neq 0$ יש הופכי: נסמן ערך מוחלט של מספר מרוכב $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, אז

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i=\frac{a}{|a+bi|^2}+\frac{-b}{|a+bi|^2}i$$

נשים לב שמתקיים $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ ושיש קונסיסטנטיות בין המבנה והפעולות של $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$. נאמר שאלו "תת שדות" זה של זה, ונציין שבין $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{C}$ אין אף שדה נוסף, אבל בין $\mathbb{Q}$ ל $\mathbb{R}$ ישנם אינסוף שדות ביניים.

הערה: ישנם מבנים אלגבריים עם כפל וחיבור שאינם שדות, למשל השלמים (לא קיים הופכי), המטריצות הריבועיות (אין חילופיות בכפל) או $\mathbb{Z}_m$ כאשר m לא ראשוני, למשל $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ אינו שדה כי אין ל 2 הופכי. מצד שני כן קיים שדה עם 4 איברים, הוא פשוט לא שדה שארית. יש בו ארבעה איברים $\{0,1,A,B\}$ והפעולות מוגדרות על פי הטבלאות הבאות:

$+$	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

$\cdot$	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B
A	0	A	B	1
B	0	B	1	A

8.2 מערכות משוואות לינאריות ו־n־יות מעל שדות

כל מה שעשינו עד עכשיו היה נכון גם מעל שדה כלשהו $\mathbb{F}$ ולאו דווקא מעל הממשיים, כיוון שלכל אורך הדרך השתמשנו אך ורק בתכונות השדה של הממשיים, שכמובן תקיפות גם לכל שדה אחר. למשל ניתן להגדיר את המרחב $\mathbb{F}^n$ לשדה כלשהו, כאשר פעולת החיבור בין n־יות מתבססת על החיבור ב $\mathbb{F}$, והכפל בסקלר מתבסס על הכפל ב $\mathbb{F}$.

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}_3)^2$ ישנם בדיוק 9 איברים

$$(\mathbb{Z}_3)^2=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$$

ולמשל הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}\subset(\mathbb{Z}_3)^2$ תלויה לינארית, שכן $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

למערכת משוואות מעל $\mathbb{Z}_3$ יכולים להיות אפס פתרונות, פתרון יחיד, או **משפחה** של פתרונות (אין מה לדבר על אינסוף כי הכל סופי). נפתור למשל את המערכת

$$\begin{cases}2x+y &=2\\ x+2y &=1\end{cases}$$

מעל $\mathbb{Z}_3$. נציב במטריצה $(A|b)\in M_{2\times 3}\left(\mathbb{Z}^3\right)$ ונדרג

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow 2^{-1}\cdot R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+(-1)\cdot R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

ושימו לב שהשתמשנו פה בכפל בהופכי ובחיבור נגדי, כי אין פעולות חיסור וחילוק בשדות כללים (כלומר הם מוגדרים באמצעות הנגדי וההופכי). לכן הפתרונות הם מהצורה

$$S=\left\{\left(\begin{array}{c} 1+(-2)\,s\\ s\end{array}\right)\mid s\in\mathbb{Z}_3\right\}=\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}2\\1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\2\end{array}\right)\right\}$$

לשם השוואה נפתור מערכת דומה, הפעם מעל $\mathbb{Z}_5$, אז

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow 2^{-1}\cdot R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+(-1)\cdot R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2\leftarrow 4^{-1}\cdot R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+(-3)\cdot R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

והפעם ישנו פתרון יחיד בלבד, והוא $S=\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)\right\}$. בדומה מעל $\mathbb{Q}$ (או $\mathbb{R}$, או $\mathbb{C}$), מתקיים $S=\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)\right\}$.

8.3 תכונות כלליות של שדות

טענה 8.2 יהי $\mathbb{F}$ שדה, אז לכל $a\in\mathbb{F}$ קיים נגדי יחיד ולכל $0\neq a\in\mathbb{F}$ קיים הופכי יחיד.

טענה 8.3 יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהי $0\in\mathbb{F}$ האיבר הניטרלי לחיבור. אז לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $0\cdot a=0$.

הערה: משמעות הטענה היא שמכפלת הניטרלי לחיבור עם כל איבר בשדה שווה לניטלי לחיבור. יש כאן אינטרקציה בין הכפל לחיבור ולכן בהכרח חוק הפילוג ישחק פה תפקיד.

הוכחה: כיוון ש 0 ניטרלי לחיבור, בפרט מתקיים $(0+0)=0$. נעזר בחיוק הפילוג כדי לבטא את $0\cdot a$:

$$0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a$$

מהסגירות לכפל בשדה, גם $0\cdot a$ הוא איבר בו, ולכן קיים לו נגדי $-(0\cdot a)$. נחבר את הנגדי לשני האגפים ונקבל

$$\underbrace{0\cdot a+(-(0\cdot a))}_{=0}=0\cdot a+\underbrace{0\cdot a+(-(0\cdot a))}_{=0}$$

ולכן $0=0\cdot a+0=0\cdot a$ כנדרש. ■

טענה 8.4 יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהי 1 האיבר הניטרלי לכפל. אז לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $-a = (-1) \cdot a$.

הערה: כלומר, מכפלת הנגדי של היחידה באיבר כלשהו בשדה שווה לנגדי של אותו איבר ־ ושוב הכפל מתערבב עם החיבור.

הוכחה: נרצה להוכיח שהנגדי של a הינו $(-1) \cdot a$, כלומר להראות שמתקיים $(-1) \cdot a + a = 0$. ואכן

$$(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

■

טענה 8.5 יהי $\mathbb{F}$ שדה, ויהיו $a, b \in \mathbb{F}$. אז אם $a \cdot b = 0$ בהכרח $a = 0$ או $b = 0$.

הערה: ראינו שזה לא מתקיים במטריצות ריבועיות, ובנוסף זה מוכיח ש $\mathbb{Z}_m$, כאשר $m = k \cdot l$ עבור $2 \leq k, l \leq m - 1$ (כלומר m לא ראשוני), אינו שדה, כיוון ש $0 \neq k, l \in \mathbb{Z}_m$ אבל $kl = 0$ באופן שבו הגדרנו את הפעולות.

הוכחה: נניח כי $a \cdot b = 0$, ונניח כי $a \neq 0$. אז קיים הופכי a^{-1}. נכפול את שני האגפים ונקבל

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

אבל מחוק הקיבוץ אגף שמאל הינו

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = \left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot b = 1 \cdot b = b$$

ולכן אם $a \neq 0$ אז בהכרח $b = 0$, כנדרש. ■

9 מרחבים וקטורים

9.1 הגדרה ודוגמאות

הגדרה 9.1 תהי V קבוצה, ויהי $\mathbb{F}$ שדה. לאיברי V נקרא וקטורים ולאיברי $\mathbb{F}$ נקרא סקלרים. נניח כי מוגדרות פעולת חיבור בין וקטורים, ופעולת כפל וקטור בסקלר. אז V נקרא **מרחב וקטורי מעל** $\mathbb{F}$ אם מתקיים:

תכונות ביחס לפעולת החיבור:

- סגירות לחיבור: לכל $u, v \in V$ מתקיים $(u + v) \in V$.
- איברי האפס: קיים $0 \in \mathbb{R}^n$ כך ש $u + 0 = u$ לכל $u \in V$.
- לכל $u \in V$ קיים איברי נגדי $-u \in V$ המקיים $u + (-u) = 0$.
- חוק הקיבוץ $(u + v) + w = u + (v + w)$ (אסוציאטיביות)

- חוק החילוף $u+v=v+u$ (קומוטטיביות)

תכונות ביחס לפעולת הכפל בסקלר:

- סגירות לכפל בסקלר: לכל $v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים $\lambda v\in V$.
- איבר זהות: לכל $u\in V$ מתקיים $1\cdot u=u$ כאשר $1\in\mathbb{F}$ איבר היחידה בשדה.
- התאמה בין כפל בשדה $\mathbb{F}$לבין כפל וקטור בסקלר: $\mu\left(\lambda v\right)=\left(\mu\lambda\right)v$.
- חוק הפילוג I: $\left(\mu+\lambda\right)v=\mu v+\lambda v$.
- חוק הפילוג II: $\lambda\left(v+u\right)=\lambda v+\lambda u$.

הערה: אין משמעות לכפל וקטורים או לחיבור וקטור לסקלר. גם כבמקרים בהם ניתן לתת משמעות לפעולות הללו, עדיין מרחב וקטורי ושדה זה לא אותו דבר.

דוגמאות: להלן שלל דוגמאות של מרחבים וקטורים בהם נעסוק בהמשך הקורס:

1. המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^n$ מעל השדה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ עם הפעולות שהגדרנו כשדיברנו על n־יות מעל הממשיים.
2. באופן כללי, $\mathbb{F}^n$ הינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, כאשר הפעולות נלקחות איבר איבר בדומה ל $\mathbb{R}^n$.

   דוגמה: המרחב $\left(\mathbb{Z}_5\right)^n$ מעל $\mathbb{Z}_5$ הינו מרחב ה־n־יות המתאים לשדה $\mathbb{Z}_5$, כלומר

$$\left(\mathbb{Z}_5\right)^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mid a_1,...,a_n\in\mathbb{Z}_5\right\}$$

   עם הפעולות

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\ \vdots\\ a_n+b_n\end{pmatrix}$$

   וכפל בסקלר $\lambda\in\mathbb{Z}_5$

$$\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix}$$

למשל במרחב $\left(\mathbb{Z}_5\right)^2$:

$$2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

3. מקרה פרטי של המקרה הקודם הוא $n=1$. כלומר כל שדה $\mathbb{F}$ הוא מרחב וקטורי מעל אותו השדה $\mathbb{F}$, ואז גם הוקטורים הם איברי $\mathbb{F}$ וגם הסקלרים.

4. מקרה מעניין נוסף הוא $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$ (תשכנעו את עצמכם שזה מרחב וקטורי).

5. $V=M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מעל $\mathbb{F}$. כשהגדרנו את מרחב המטריצות עם הפעולות חיבור וכפל בסקלר בעצם הגדרנו אותו במרחב וקטורי, והתכונות הנדרשות נובעות מאקסיומות השדה.

דוגמה: במרחב $M_{2\times 3}\left(\mathbb{C}\right)$ מעל $\mathbb{C}$ מתקיים

$$i\begin{pmatrix}2+i & -3+i & 0\\ 3i & -i & 1\end{pmatrix}+2i\begin{pmatrix}1 & -2i & i\\ 1+2i & -1-i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4i & 3-3i & -2\\ -7+2i & 3-2i & i\end{pmatrix}$$

6. $V=\mathbb{F}_n\left[x\right]$ מעל $\mathbb{F}$, כאשר $\mathbb{F}_n\left[x\right]$ הינם הפולינומים ממעלה **לכל היותר** n עם מקדמים מתוך השדה $\mathbb{F}$, כלומר

$$\mathbb{F}_n\left[x\right]=\left\{a_0+a_1x+...+a_nx^n\middle|\, a_0,...,a_n\in\mathbb{F}\right\}$$

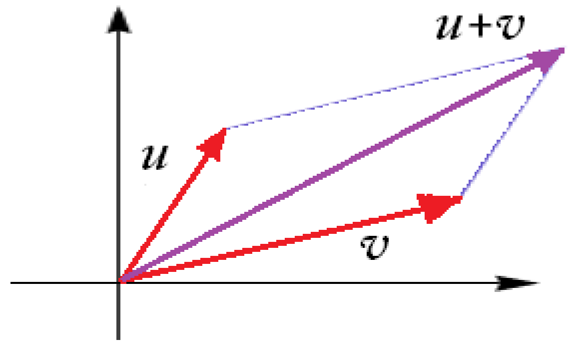
שוויון בין פולינומים הינו שויון כל המקדמים, וחיבור פולינומים וכפל בסקלר מוגדרים מקדם־מקדם. למשל ב $\mathbb{R}_2\left[x\right]$ מתקיים

$$-3\left(2x^2-4x+1\right)+2\left(3x^2+3\right)=12x+3\in\mathbb{R}_2\left[x\right]$$

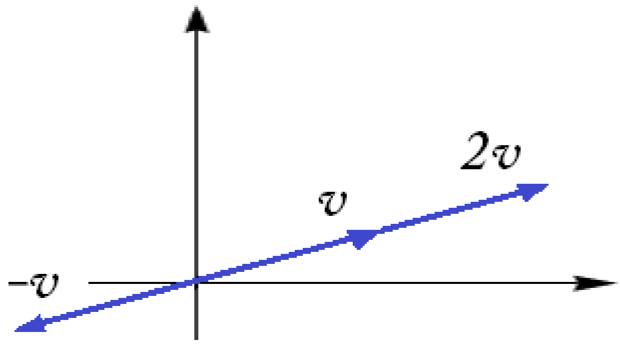
שימו לב שקבוצת הפולינומים ממעלה **בדיוק** n, כלומר $\left\{a_0+a_1x+...+a_nx^n\middle|\, a_0,...,a_n\in\mathbb{F}\,\text{and}\,a_n\neq 0\right\}$, אינה מרחב וקטורי, שכן למשל לא קיים בה איבר האפס (פולינום שכל מקדמיו הם איבר האפס בשדה).

7. $V=\left\{\text{arrows in the plain with basis at the origin}\right\}$מעל $\mathbb{R}$. הפעולות הן:

חיבור: סכום שני חצים הינו חץ שמסתיים בקצה של המקבילית הנפרשת על ידי שני החצים.



כפל בסקלר: חץ באותו הכיוון שאורכו מוכפל על פי הסקלר. אם הסקלר שלילי אז החץ יפנה לכיוון ההפוך ביחס לראשית.



וקטור האפס הינו וקטור "חסר אורך", כלומר וקטור שתחילתו וסופו בראשית.

9.2 תתי מרחבים

הגדרה 9.2 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $V \subset U$ תת קבוצה המהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ בפני עצמה ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר של V. אז U נקראת **תת מרחב וקטורי** של V.

דוגמה: ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ונסמן $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. נראה ש U תת מרחב של V:

- סגירות לחיבור: יהיו $u, v \in U$, כלומר $u = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} b \\ 2b \end{pmatrix}$. אז

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 2(a+b) \end{pmatrix}$$

ולכן מתקיים $(u+v) \in U$.

- איבר האפס: עבור $a=0$ האיבר $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ נמצא ב U.
- איבר נגדי: לכל $u \in U$, נניח $u = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$, ניקח אז $-u = \begin{pmatrix} -a \\ -2a \end{pmatrix}$ מהווה איבר נגדי.
- חוקי הקיבוץ והחילוף ב U נובעים מקיומם ב $V=\mathbb{R}^2$.
- סגירות לכפל בסקלר: לכל $u \in U$, נניח $u = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ ולכל $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda a \\ 2(\lambda a) \end{pmatrix} \in U$.
- איבר זהות, התאמה בין כפל בשדה לבין כפל וקטור בסקלר וחוקי הפילוג נובעים מקיומם ב $V=\mathbb{R}^2$.

טענה 9.3 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. כדי להראות ש $U \subset V$ הינו תת מרחב מספיק להוכיח:

1. איבר האפס $0 \in V$ שייך גם ל U.
2. U סגורה לחיבור.
3. U סגורה לכפל בסקלר.

הוכחה: נותר להראות את הסגירות לנגדי, אותה נקבל מכפל בסקלר -1, שכן מהאקסיומות נובע שאכן $(-1)v=-v$ (אותה הוכחה כמו הטענה המקבילה בשדות). יש לציין כי אם נתון $U \neq \emptyset$ אז התנאי הראשון $0 \in U$ מיותר, שכן קיים $u \in U$ ומהאקסיומות נובע $0 = 0 \cdot u \in U$ (אותה הוכחה כמו הטענה המקבילה בשדות). ■

דוגמאות:

1. לכל מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{F}$, $U=V$ הינו תת מרחב וקטורי כמובן. בנוסף $U=\{0\}$ הינו תת מרחב וקטורי:
   (א) כמובן $0 \in U$.
   (ב) סגירות לחיבור: $0+0=0 \in U$.
   (ג) סגירות לכפל בסקלר: $\lambda \cdot 0 = 0 \in U$.

   הערה: U נקרא תת מרחב האפס, או תת המרחב הטריוויאלי. חשוב להבדיל בין $U=\{0\}$ לבין $U=\emptyset$.

2. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. תמיד כדאי להתחיל מלבדוק אם $0 \in U$, וזה לא מתקיים כאן, ולכן U אינו תת מרחב.

3. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\a^2\end{pmatrix}|\,a\in\mathbb{R}\right\}$. כאן $0\in U$, אבל למשל

$$\begin{pmatrix}a\\a^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a^2+b^2\end{pmatrix}$$

אבל באופן כללי $(a+b)^2\neq a^2+b^2$, למשל עבור $a=b=1$, ולכן

$$\begin{pmatrix}a+b\\a^2+b^2\end{pmatrix}\notin U$$

ואין סגירות לחיבור, ולכן U לא תת מרחב.

4. $V=\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$, ונניח $U\subset V$ אוסף פתרונות של מערכת משוואות לינאריות **הומוגנית** מעל $\mathbb{F}$. כלומר עבור $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נגדיר

$$U=\{v\in\mathbb{F}^n|\,Av=0\}$$

אז U הינו תת מרחב וקטורי:

(א) למערכת הומוגנית תמיד קיים הפתרון הטריוויאלי, כלומר $A\cdot 0=0$ ולכן $0\in U$.

(ב) סגירות לחיבור: יהיו $u,v\in U$, אז $A(v+u)=Av+Au=0$ ולכן $v+u\in U$.

(ג) סגירות לכפל בסקלר: יהיו $u\in U$ ו $\lambda\in\mathbb{F}$, אז $A(\lambda u)=\lambda Au=\lambda\cdot 0=0$ ולכן $\lambda u\in U$.

הערה: נשים לב שאם $A=0$ אז $U=\mathbb{F}^n$, ואם עמודות A בת"ל מעל $\mathbb{F}$ אז $U=\{0\}$.

5. $V=\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$, ונניח $U\subset V$ אוסף פתרונות של מערכת משוואות לינאריות **לא הומוגנית** מעל $\mathbb{F}$. כלומר עבור $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו $0\neq b\in\mathbb{F}^m$ נגדיר

$$U=\{v\in\mathbb{F}^n|\,Av=b\}$$

אז U לא תת מרחב וקטורי, ואכן $0\notin U$.

6. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $U=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$. לא תת מרחב וקטורי, כי למשל לא סגורה לכפל בסקלר 2.

7. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}|\,a,b\geq 0\right\}$. לא תת מרחב וקטורי, כי למשל לא סגורה לכפל בסקלר -1.

8. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mid ab\geq 0\right\}$. לא תת מרחב וקטורי, כי למשל לא סגורה לחיבור. למשל:

$v=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, u=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ אז $u+v=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\notin U$.

9.3 מושגי יסוד במרחבים וקטוריים

הגדרה 9.4 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $\{u_1,...,u_n\}\subset V$ תת קבוצה סופית. נאמר כי $v\in V$ הינו צירוף לינארי של $u_1,...,u_n$ אם קיימים $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{F}$ כך שמתקיים

$$v=\lambda_1u_1+...+\lambda_nu_n.$$

את קבוצת הצירופים הלינארים של $u_1,...,u_n$ עם מקדמים מהשדה $\mathbb{F}$ נסמן על ידי $Span_{\mathbb{F}}\{u_1,...,u_n\}\subset V$, זוהי תת הקבוצה הנפרשת על ידי $u_1,...,u_n$, כלומר

$$Span_{\mathbb{F}}\{u_1,...,u_n\}=\{\lambda_1u_1+...+\lambda_nu_n|\,\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{F}\}.$$

אם $H\subset V$ קבוצה כלשהי (לאו דווקא סופית), אז הקבוצה הנפרשת על ידי H הינה אוסף הצירופים הלינאריים **הסופיים** של איברי הקבוצה, כלומר

$$Span_{\mathbb{F}}H=\{\lambda_1u_1+...+\lambda_nu_n|\,n\in\mathbb{N},\,u_1,...,u_n\in H,\,\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{F}\}$$

בנוסף נגדיר $Span_{\mathbb{F}}\emptyset=\{0\}$.

טענה 9.5 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $H\subset V$ תת קבוצה, אז $Span_{\mathbb{F}}H$ הינו תת מרחב של V.

הוכחה: נראה שהתכונות הדרושות מתקיימות:

א. מההגדרה נובע כי $0\in Span_{\mathbb{F}}H$ כי זהו הצירוף הטריוויאלי.

ב. סגירות לחיבור: יהיו $u,v\in Span_{\mathbb{F}}H$, אז קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימים $u_1,..,u_n\in H$ עבורם

$$u=\lambda_1u_1+...+\lambda_nu_n$$

$$v=\mu_1u_1+...+\mu_nu_n$$

יתכן כמובן שיש מספר שונה של איברים בצירופים הלינאריים השונים, ושהוקטורים המרכיבים אותם שונים, אבל כיוון שאלה צירופים סופיים ניתן "לתקן" אותם על ידי איחוד קבוצות הוקטורים היוצרים ושימוש באפסים כמקדמים לצירופים הלינאריים

של אותה קבוצת וקטורים. לכן

$$u+v=\underbrace{(\lambda_1+\mu_1)}_{\in\mathbb{F}}u_1+...+\underbrace{(\lambda_n+\mu_n)}_{\in\mathbb{F}}u_n\in Span_{\mathbb{F}}H$$

צירוף לינארי סופי של איברי מתוך H.

ג. סגירות לכפל בסקלר: כמקודם, אם $u\in Span_{\mathbb{F}}H$, אז קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימים $u_1,..,u_n\in H$ עבורם

$$u=\lambda_1u_1+...+\lambda_nu_n$$

ולכן לכל $\alpha\in\mathbb{F}$

$$\alpha u=\underbrace{\alpha\lambda_1}_{\in\mathbb{F}}u_1+...+\underbrace{\alpha\lambda_n}_{\in\mathbb{F}}u_n\in Span_{\mathbb{F}}H$$

■

הגדרה 9.6 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $H\subset V$ תת קבוצה, אז $U=Span_{\mathbb{F}}H$ הינו **תת המרחב הנפרש על ידי** H. במקרה כזה נאמר ש H **פורשת** את U.

דוגמה: עבור $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}=\mathbb{F}$ נסמן $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\2a\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}$. הקבוצות

$$U,\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}-\pi\\-2\pi\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

כולן פורשות את U. הקבוצה $H=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא פורשת את U, כי אמנם $U\subset Span_{\mathbb{F}}H$ אבל ההכלה לכיוון השני לא נכונה ובפרט $Span_{\mathbb{F}}H=\mathbb{R}^2\neq U$.

דוגמה: עבור $\mathbb{R}_2[x]$ מעל $\mathbb{R}$ הקבוצה $\left\{1,x,x^2\right\}$ פורשת את המרחב כולו $\mathbb{R}_2[x]$. נתבונן בתת המרחב

$$U=Span_{\mathbb{R}}\left\{x^2-x,1-x\right\}$$

ונשאל, האם $x^2-3\in U$? בעצם אנחנו שואלים האם קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ עבורם

$$x^2-3=\alpha\left(x^2-x\right)+\beta\left(1-x\right)$$

וכיוון ששוויון נקבע על ידי השוואת מקדמים ל $1,x,x^2$, עלינו לפתור את מערכת המשוואות הלינאריות הבאה:

$$\begin{cases}\alpha & =1\\ -\alpha-\beta & =0\\ \beta & =-3\end{cases}$$

נפתור בעזרת דירוג מטריצות:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

וקיבלנו שורת סתירה, כלומר אין α, β שפותרים את המערכת, כלומר $x^2 - 3 \notin Span_{\mathbb{R}} \left\{x^2 - x, 1 - x\right\}$.

הגדרה 9.7 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, אם קיימת קבוצה סופית $H \subset V$ עבורה $V = Span_{\mathbb{F}} H$ אז V נקרא נוצר סופית (מעל $\mathbb{F}$).

דוגמאות: כל המרחבים שתארנו עד כה הם נוצרים סופית: זה ברור עבור $\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$, ובדומה הפולינומים x^j (נקראים גם מונומים) פורשים את $\mathbb{F}_n [x]$ והמטריצות עם היחידה במקום ה ij ואפס בשאר פורשות את $M_{m\times n} (\mathbb{F})$. לעומת זאת $\mathbb{F} [x]$ מרחב הפולינומים ממעלה כלשהי אינו נוצר סופית וכך גם מרחב הפונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. גם המרחב $\mathbb{R}$ מעל השדה $\mathbb{Q}$ לא נוצר סופית, למרות שהוא נוצר סופית כמרחב מעל $\mathbb{R}$. אנחנו נעסוק בעיקר במרחבים נוצרים סופית בקורס.

הגדרה 9.8 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. נאמר ש $S \subset V$ היא קבוצה **בלתי תלויה לינארית** (בת"ל) אם לכל $u_1, ..., u_n \in S$ ולכל $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$, אם

$$0 = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$$

אז $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. אחרת, כלומר אם קיימים $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$, לא כולם אפס עבורם המקיימים את המשוואה, אז נאמר שהקבוצה **תלויה לינארית**.

הערה: באופן שקול – קבוצה היא בת"ל אם הדרך היחידה להציג את וקטור האפס ב V כצירוף לינארי של איברי הקבוצה היא באמצעות הצירוף הטריוויאלי.

דוגמה: האם $\left\{x^2 - x, 1 - x\right\} \subset \mathbb{R}_2 [x]$ היא בת"ל מעל $\mathbb{R}$? כמקודם, אנחנו רוצים לפתור מערכת משוואות לינאריות, הפעם הומוגנית. המטריצה המתאימה היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

וקיבלנו כי ישנו פתרון יחיד למערכת, והוא הפתרון הטריוויאלי. לכן הקבוצה בת"ל.

הערה: הקבוצה הריקה $\emptyset \subset V$ הינה קבוצה בלתי תלויה לינארית, שכן התנאי לאי תלות לינארית מתקיים באופן ריק.

את שתי הטענות הבאות מוכיחים בדיוק כמו הטענות המקבילות במרחב $\mathbb{R}^m$:

טענה 9.9 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אז $\{u_1, ..., u_n\} \subset V$ תלויה לינארית אם ורק אם לפחות **אחד** מבין $u_1, ..., u_n$ הינו צירוף לינארי של השאר.

טענה 9.10 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, תהי $\{u_1, ..., u_n\} \subset V$ בלתי תלויה לינארית, ויהי $0 \neq v \in V$. אז $\{u_1, ..., u_n, v\}$ בת"ל אם ורק אם $v \notin Span_{\mathbb{F}}\{u_1, ..., u_n\}$.

9.4 בסיסים של מרחבים וקטוריים

הגדרה 9.11 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, נאמר ש $\{u_1, ..., u_n\} \subset V$ היא **בסיס של** V אם היא פורשת את V ואם היא בלתי תלויה לינארית.

דוגמה: כפי שראינו $\{x^2 - x, 1 - x\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ אמנם בת"ל אבל לא פורשת, ולכן אינה בסיס. מצד שני, היא כן פורשת את תת המרחב $Span_{\mathbb{F}}\{x^{2-}x, 1 - x\}$ ובלתי תלויה לינארית, ולכן מהווה בסיס לתת המרחב הזה.

את המשפט הבא ראינו במרחב $\mathbb{R}^m$, ההוכחה כאן דומה:

משפט 9.12 יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $B \subset V$. אז התנאים הבאים שקולים:

א. B בסיס של V.

ב. כל וקטור $v \in V$ ניתן להצגה אחת ויחידה כצירוף לינארי של איברי B.

ג. B בלתי תלויה לינארית מירבית (ביחס להכלה).

ד. B פורשת מזערית (ביחס להכלה).

טענה 9.13 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ונניח כי $\{v_1, ..., v_k\} \subset V$ פורשת את V. תהי $H \subset V$ קבוצה עם יותר מ k איברים, אז H תלויה לינארית.

הוכחה: מספיק להתבונן בקבוצה $\{u_1, ..., u_m\} \subset H$ עם $m > k$ ולהראות שקיימים מקדמים $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{F}$, לא כולם אפס, המקיימים $\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = 0$. נשים לב שנתון ש $\{v_1, ..., v_k\}$ פורשת את V, ולכן נוכל לכתוב $u_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} v_i$. נציב את ההצגות הנ"ל במשוואה שלנו ונקבל

$$0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ij} \right) v_i$$

כאשר השתמשנו בחוק הפילוג ובכך שניתן להחליף סדר סכימה, שכן כל הסכומים סופיים. נשים לב שאם נראה שקיימים $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{F}$, לא כולם אפס, המקיימים $\sum_{j=1}^m \lambda_j \alpha_{ij} = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$, אז מהמשוואה למעלה, אלו בדיוק $\lambda_1, ..., \lambda_m$

שרצינו להוכיח שקיימים. המערכת $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\alpha_{ij}=0$ לכל $1\leq i\leq k$ היא מערכת משוואות לינאריות הומוגנית עם m משתנים $\lambda_1,..,\lambda_m$ ו k משוואות. כיוון ש $m>k$ יש משתנה חופשי, ובפרט קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת, כנדרש. ■

מסקנה 9.14 יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, אז לכל שני בסיסים של V אותו מספר איברים בדיוק.

הוכחה: נניח כי $B_1=\{u_1,...,u_m\}$ ו $B_2=\{v_1,...,v_k\}$ בסיסים של V. אז B_1 בסיס ובפרט קבוצה פורשת, ו B_2 בסיס ובפרט קבוצה בת"ל, ולכן, מהטענה הקודמת, $k\leq m$. באופן דומה נקבל גם $m\leq k$ וסך הכל שוויון במספר האיברים. ■

הגדרה 9.15 יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. אז מספר האיברים בבסיס שלו נקרא **המימד** של V ומסמנים $\dim_{\mathbb{F}}V$. כשברור מעל איזה שדה עובדים אז מקצרים וכותבים פשוט $\dim V$.

הערה: מימד מרחב האפס הינו $\dim\{0\}=0$. אם V אינו נוצר סופית אומרים $\dim V=\infty$, כלומר V ממימד אינסופי.

דוגמאות: נחשב מימדים של כמה מהמרחבים שעסקנו בהם, על ידי מציאת בסיס שלהם וספירת איברים:

- $V=\mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$. בדומה למה שראינו מעל הממשיים, הקבוצה $E=\{e_1,...,e_n\}$ כאשר

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},...,e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

נקראת הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$, וההוכחה שהיא בסיס זהה למקרה הממשי. שימו לב שכאן ה־1־ים הם איבר היחידה בשדה $\mathbb{F}$, וה־0־ים הם איבר האפס בשדה.

מסקנה: $\dim\mathbb{F}^n=n$.

- $V=M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מעל $\mathbb{F}$. גם כאן יש בסיס סטדנרטי $E=\{E_{11},...,E_{mn}\}$, כאשר

$$(E_{kl})_{ij}=\begin{cases}1 & i=k,\,j=l\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

כלומר המטריצה שכל מקדמיה אפסים פרט למקדם ה kl שלה, שהוא בדיוק 1. למשל הבסיס הסטדנרטי של $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$ הינו

$$E=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=E_{11}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=E_{12}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=E_{13}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{=E_{21}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{=E_{22}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=E_{23}}\right\}$$

מסקנה: $\dim M_{m\times n}(\mathbb{F})=m\cdot n$.

- $V=\mathbb{F}_n\left[x\right]$ מעל $\mathbb{F}$. הבסיס הסטנדרטי כאן הוא הבסיס $E=\{e_0,...,e_n\}$ כאשר

$$e_0=1,\, e_1=x,\, e_2=x^2,...,\, e_n=x^n$$

מסקנה: $\dim\mathbb{F}_n\left[x\right]=n+1$.

תרגיל: הראו כי $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$.

פתרון: עלינו להראות כי בבסיס של $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$ ישנם בדיוק שני איברים. נוכיח כי $\{1,i\}\subset\mathbb{C}$ בסיס:

- **בלתי תלויה לינארית:** נניח כי $\alpha\cdot 1+\beta\cdot i=0$ כאשר $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. שוויון במרוכבים מתקבל מהשוואת חלק ממשי והשוואת חלק מדומה, ולכן נקבל שבהכרח $\alpha=0$ וגם $\beta=0$, כלומר הפתרון היחיד הוא הטריוויאלי והקבוצה בלתי תלויה לינארית מעל $\mathbb{R}$.
- **פורשת:** את ההגדרה של המרוכבים בתור $\mathbb{C}=\{a+ib|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ ניתן לשכתב בתור $\mathbb{C}=Span_{\mathbb{R}}\{1,i\}$ ובפרט הקבוצה פורשת את המרחב.

סך הכל מצאנו בסיס עם שני איברים, ולכן המימד של המרחב הוקטורי הוא 2.

הערה: זה כמובן לא סותר את העובדה ש $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$, ובדומה לכל שדה $\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}=1$. תמיד נוכל לבחור כבסיס של המרחב את הקבוצה $\{1\}\subset\mathbb{F}$.

9.5 חיתוך וסכום של תתי מרחבים

טענה 9.16 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W\subset V$ תתי מרחבים של V. **חיתוך** תתי המרחבים $U\cap W$

$$U\cap W=\{v\in V|\,v\in U\,\text{and}\,v\in W\}$$

הינו תת מרחב וקטורי של V. **סכום** תתי המרחבים $U+W$ הנתון על ידי

$$U+W=\{u+w|\,u\in U,\,w\in W\}=\{v\in V|\,\text{there exist}\,\,u\in U,\,w\in W\,\text{such that}\,v=u+w\}$$

הינו תת מרחב וקטורי של V.

הערה: שימו לב שסכום תתי מרחבים **אינו** איחוד תתי מרחבים. נראה שבאופן כללי איחוד תתי מרחבים אינו תת מרחב בעצמו.

הוכחה: נראה שהחיתוך $U\cap W$ הוא תת מרחב וקטורי:

א. מהנתון ש U,W תתי מרחבים מתקיים $0\in U$ וגם $0\in W$ ולכן $0\in U\cap W$.

ב. יהיו $v_1, v_2 \in U \cap W$ אז בפרט $v_1, v_2 \in U$ וכיוון ש U תת מרחב אז הוא סגור לחיבור ולכן $v_1 + v_2 \in U$. מאותם שיקולים $v_1 + v_2 \in W$ ולכן הסכום שייך גם לחיתוך.

ג. יהי $v \in U \cap W$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אז כמקודם, $v \in U$ ולכן גם $\lambda v \in U$, ובדומה $\lambda v \in W$ ולכן λv שייך גם לחיתוך.

נראה שהסכום $U + W$ הוא תת מרחב וקטורי:

א. מהנתון ש U, W תתי מרחבים מתקיים $0 \in U$ וגם $0 \in W$ ולכן

$$0 = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} \in U + W$$

ב. יהיו $v_1, v_2 \in U + W$, אז קיימים $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ כך ש $v_1 = u_1 + u_2$, $v_2 = u_2 + w_2$. לכן

$$v_1 + v_2 = u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = \underbrace{u_1 + u_2}_{\in U} + \underbrace{w_1 + w_2}_{\in W} \in U + W$$

ג. יהי $v \in U + W$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$, אז קיימים $u \in U,\ w \in W$ כך ש $v = u + w$. לכן

$$\lambda v = \lambda \left(u + w\right) = \underbrace{\lambda u}_{\in U} + \underbrace{\lambda w}_{\in W} \in U + W$$

■

דוגמה: נתבונן על תתי המרחבים $U, W \subset \mathbb{R}^3$ הנתונים על ידי

$$U = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, W = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים לב שהקבוצות הפורשות את U ואת W שתיהן בת"ל, ולכן מהוות בסיס לתתי המרחבים ובפרט $\dim U = \dim W = 2$.

בנוסף $U, W, U \cap W, U + W$ כולם תתי מרחבים של $V = \mathbb{R}^3$ המקיים $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

חיתוך: נניח כי $v \in U \cap W$ אז בפרט $v \in U$ וגם $v \in W$ ולכן קיימים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ עבורם

$$v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נשווה בין הביטויים השונים של v

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ פתרון למערכת משוואות לינאריות הומוגנית של שלוש משוואות בארבעה משתנים:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \\ x_1 - x_3 & = 0 \end{cases}$$

כלומר אם $v \in U \cap W$ אז המקדמים $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ המתאימים לו כצ"ל של איברי הקבוצות הפורשות את תתי המרחבים הנתונים מהווים פתרון למערכת המשוואות ההומוגנית הנ"ל, וכל פתרון של המערכת הזאת מגדיר צירופים לינאריים של איברי הקבוצות הפורשות את תתי המרחבים שנמצא בחיתוך.

נפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

אז

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} s/2 \\ s/2 \\ s/2 \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ואלו בדיוק בחירות המקדמים $\lambda_1, .., \lambda_4$ המתאימים לאיברי החיתוך כצירופים לינארים של הקבוצות הפורשות את תתי המרחבים. ואכן, עבור המקדמים של איברי החיתוך כצ"ל של איברי הקבוצה שפורשת את U ניקח $\lambda_1 = \lambda_2 = s$ ונסיק

$$U \cap W = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ובאופן דומה אם ניקח $\lambda_3 = s$ $\lambda_4 = 2s$ כמקדמים של איברי החיתוך כצ"ל של איברי הקבוצה הפורשת את W נקבל

$$U \cap W = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

סכום: הפעם נניח כי $v \in U+W$ אז קיימים $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ עבורם

$$v = \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u\in U} + \underbrace{\lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w\in W}$$

ולכן

$$U+W = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים לב שזה לא בסיס, כיוון שהקבוצה תלויה לינארית. לא קשה לראות שהאיבר הראשון הוא צ"ל של השאר, ולכן

$$U+W = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

וקבוצה זאת בלתי תלויה לינארית, ולכן מהווה בסיס, ולכן $\dim(U+W)=3$. ניתן להראות בידיים שבעצם $U+W=\mathbb{R}^3$. בהמשך נראה באופן כללי שאם לתת המרחב אותו המימד של המרחב הוקטורי אז הם שווים.

הערה: אם חושבים על $\mathbb{R}^3$ כעל המרחב התלת מימדי, אז U,W שניהם מגדירים מישורים החותכים את הראשית, החיתוך שלהם הינו ישר החותך את הראשית והסכום שלהם הוא המרחב כולו.

טענה 9.17 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W \subset V$ תתי מרחבים של V. אז $U \cup W$ תת מרחב וקטורי אם ורק אם $W \subset U$ או $U \subset W$.

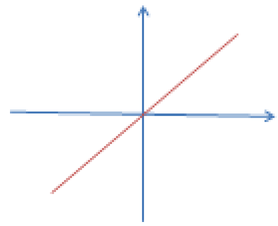
הוכחה: $(\Rightarrow)$ אם אחד מתתי המרחבים מכיל את השני, למשל אם $U \subset W$ אז $U \cup W = W$ ונתון כי W תת מרחב וקטורי.
$(\Leftarrow)$ נניח שהאיחוד הוא מרחב וקטורי, ונניח בשלילה שאף תת מרחב לא מכיל את השני, כלומר נניח שקיים $u \in U$ כך ש $u \notin W$ ושקיים $w \in W$ כך ש $w \notin U$, ונשים לב ש $u,w \in U \cup W$. מההנחה שלנו שהאיחוד הוא תת מרחב וקטורי הוא סגור לחיבור ובפרט $u+w \in U \cup W$, ולכן $u+w \in U$ או $u+w \in W$. אם אכן $u+w \in U$, מסגירות לחיבור ב U ומכך ש $-u \in U$ נקבל

$$w = \underbrace{u+w}_{\in U} + \underbrace{(-u)}_{\in U} \in U$$

בסתירה לכך שהנחנו $w \notin U$, ולכן $u+w \notin U$. באופן דומה נקבל $u+w \notin W$ ולכן $u+w \notin U \cup W$ בסתירה להנחה שהאיחוד הוא תת מרחב וקטורי. ■

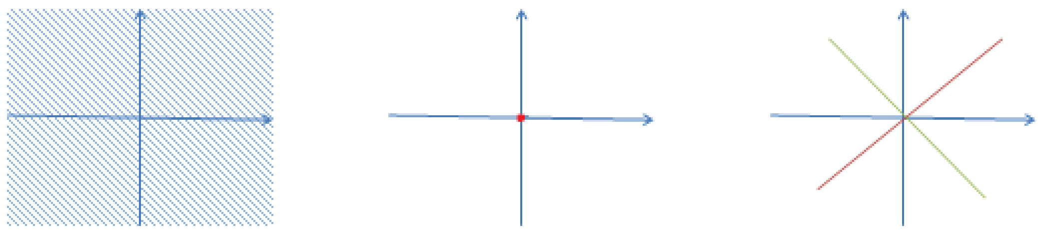
אינטואיציה גאומטרית: נניח $\mathbb{R}^2$ הוא המישור, ויהיו U,W תתי מרחבים חד מימדים, כלומר ישרים החותכים את הראשית.

אם $U=W$, אז מדובר באותו ישר:



במקרה זה החיתוך, הסכום והאיחוד של תתי המרחבים הוא בדיוק אותו הישר.

אם $U\neq W$ אז מדובר בשני ישרים שונים: במקרה כזה $U\cap W=\{0\}$ ו $U+W=\mathbb{R}^2$.



האיחוד הוא פשוט איחוד שני הישרים, ואינו מהווה תת מרחב וקטורי.

הגדרה 9.18 יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W\subset V$. נאמר כי V הוא **סכום ישר** של U,W אם לכל $v\in V$ קיים $u\in U$ יחיד וקיים $w\in W$ יחיד המקיימים $v=u+w$. במקרה כזה מסמנים $V=U\oplus W$.

טענה 9.19 $V=U\oplus W$ אם ורק אם $V=U+W$ וגם $U\cap W=\{0\}$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נניח כי $V=U\oplus W$, כלומר לכל $v\in V$ קיימים $u\in U$ ו$w\in W$ יחידים עבורם $v=u+w$. מהקיום של זוג כזה נקבל $V=U+W$. נניח בשלילה שקיים $0\neq v\in U\cap W$ אז

$$v=\underbrace{v}_{\in U}+\underbrace{0}_{\in W}=\underbrace{0}_{\in U}+\underbrace{v}_{\in W}$$

ואלו שתי הצגות שונות של v כסכום איברים מ U ו W, בסתירה.

$(\Rightarrow)$ נניח כי $U\cap W=\{0\}$ וגם $V=U+W$. מההנחה כי V סכום של שני המרחבים קיימים $u\in U$ ו $w\in W$ כך ש $v=u+w$. נניח בשלילה שקיימים $u\neq u_0\in U$ ו $w\neq w_0\in W$ כך ש $v=u_0+w_0$. נקבל מכך

$$u+w=u_0+w_0$$

ולכן

$$\underbrace{w-w_0}_{\in W}=\underbrace{u_0-u}_{\in U}$$

ולכן קיים איבר שונה מאפס שנמצא גם ב U וגם ב W ולכן בחיתוך, בסתירה. ■

9.6 מימדי תתי מרחבים ונוסחת המימדים

מהטענות שראינו קודם לכן בנוגע לקבוצות פורשות, בלתי תלויות לינארית ובסיסים, נובעות שתי המסקנות השימושיות הבאות:

מסקנה 9.20 כל קבוצה פורשת ניתן לצמצם לבסיס.

הוכחה: אם הקבוצה בת"ל אז היא בסיס. אחרת, אם היא תלויה לינארית, אז אחד הוקטורים הינו צירוף לינארי של האחרים והסרתו מהקבוצה לא תשנה את המרחב הנפרש על ידי הקבוצה. ■

מסקנה 9.21 כל קבוצה בלתי תלויה לינארית ניתן להשלים לבסיס.

הוכחה: אם הקבוצה פורשת את המרחב אז היא בסיס. אחרת, אם הקבוצה לא פורשת, אז קיים איבר במרחב שאינו בתת המרחב הנפרש על ידי הקבוצה, והוספתו לקבוצה תשמור עליה בלתי תלויה לינארית. ■

טענה 9.22 יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U\subset V$ תת מרחב. אז $U=V$ אם ורק אם $\dim_{\mathbb{F}}U=\dim_{\mathbb{F}}V$, או באופן שקול, $U\subsetneqq V$ אם ורק אם $\dim_{\mathbb{F}}U<\dim_{\mathbb{F}}V$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ אם $U=V$ אז כל בסיס ב V הוא בסיס גם ב U ובפרט המימדים שווים.
$(\Rightarrow)$ נניח כי $\dim_{\mathbb{F}}U=k=\dim_{\mathbb{F}}V$, ויהי $B=\{u_1,...,u_k\}\subset U$ בסיס של U. נניח בשלילה $U\subsetneqq V$, כלומר קיים $v\in V$ כך ש $v\notin U=Span_{\mathbb{F}}B$. אז $\{u_1,...,u_k,v\}\subset V$ קבוצה בת"ל V המכילה $k+1$ איברים, בסתירה להנחה $\dim_{\mathbb{F}}V=k$.
■

משפט 9.23 (נוסחת המימדים) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W\subset V$ תתי מרחבים. אז

$$\dim_{\mathbb{F}}(U+W)=\dim_{\mathbb{F}}U+\dim_{\mathbb{F}}W-\dim_{\mathbb{F}}(U\cap W)$$

דוגמה: כשחישבנו מוקדם יותר את $U\cap W$ ואת $U+W$ עבור $U,W\subset\mathbb{R}^3$ תתי מרחבים ממימד 2, קיבלנו שהסכום הוא ממימד 3 (היה המרחב כולו) והחיתוך היה מימד 1, ואכן $3=2+2-1$.

בנוסף, מהמשפט נובע מיידית שאם מדובר בסכום ישר אז

$$\dim_{\mathbb{F}}(U\oplus W)=\dim_{\mathbb{F}}U+\dim_{\mathbb{F}}W$$

הוכחה: בהמשך הקורס נוכיח את המשפט כמסקנה פשוטה ממשפט אחר. $\blacksquare$

למי שבכל זאת רוצה, הנה הוכחה ישירה למשפט המימדים:

הוכחה: נניח שתת מרחב החיתוך $U\cap W$ הוא ממימד $k\geq 0$, ושהקבוצה $\{v_1,...,v_k\}$ בסיס של $U\cap W$. מתקיים $U\cap W\subset U$ ולכן $\dim_{\mathbb{F}}U\geq\dim_{\mathbb{F}}(U\cap W)$, נסמן $\dim_{\mathbb{F}}U=k+m$ עבור $m\geq 0$. הבסיס לחיתוך מהווה קבוצה בלתי תלויה לינארית גם ב U, נשלימה לבסיס של U על ידי $\{v_1,...,v_k,u_1,...,u_m\}$. באותו אופן החיתוך הינו תת מרחב של W, נסמן $\dim_{\mathbb{F}}W=k+n$ ונשלים את בסיס החיתוך לבסיס של W על ידי $\{v_1,...,v_k,w_1,...,w_n\}$. נתבונן כעת בקבוצה

$$B=\{v_1,...,v_k,u_1,...,u_m,w_1,...,w_n\}$$

מספר האיברים בקבוצה הינו

$$k+m+n=(k+m)+(k+n)-k=\dim_{\mathbb{F}}U+\dim_{\mathbb{F}}W-\dim_{\mathbb{F}}(U\cap W)$$

ולכן אם נראה שהקבוצה הזאת הינה בסיס של $U+W$, אז נוכיח את נוסחת המימדים.

B **פורשת את** $U+W$**:** כלומר נראה כי $U+W=Span_{\mathbb{F}}B$:

($\supset$) כל איבר ב $Span_{\mathbb{F}}B$ ניתן לכתוב כסכום של איבר ב U ואיבר ב W ולכן $Span_{\mathbb{F}}B\subset U+W$.

($\subset$) כל איבר $v\in U+W$ ניתן לכתוב בתור $v=u+w$, ואת u ניתן להציג כצ"ל של איברי הבסיס של U ואת w ניתן להציג כצ"ל של איברי הבסיס של W, ולכן v צ"ל של איברי B ובסך הכל $U+W\subset Span_{\mathbb{F}}B$.

B **בלתי תלויה ליאנרית:** נראה כי אם

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j u_j+\sum_{l=1}^{n}\beta_l w_l=0$$

אז כל המקדמים בהכרח שווים לאפס. נעביר אגף ונקבל

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j u_j}_{\in U}=\underbrace{-\sum_{l=1}^{n}\beta_l w_l}_{\in W}$$

נסמן את האיבר מאגף ימין $v=-\sum_{l=1}^{n}\beta_l w_l$ ונשים לב שלכן $v\in W$. מהשוויון לעיל נובע כי גם $v\in U$ ולכן $v\in U\cap W$. לכן, ניתן להציגו כצ"ל של איברי הבסיס לחיתוך $\{v_1,...,v_k\}$, כלומר

$$v=\sum_{i=1}^{k}\delta_i v_i=-\sum_{l=1}^{n}\beta_l w_l$$

נעביר אגף ונקבל

$$\sum_{i=1}^{k}\delta_i v_i+\sum_{l=1}^{n}\beta_l w_l=0$$

צירוף לינארי של איברי $\{v_1,...,v_k,w_1,...,w_n\}$ ששווה לאפס, אבל הקבוצה הנ"ל בסיס של W ובפרט בת"ל ולכן בהכרח המקדמים מתאפסים, ובפרט $\beta_1=...=\beta_n=0$. נציב זאת בצ"ל המקורי ונקבל

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j u_j=0$$

צירוף לינארי של איברי $\{v_1,...,v_k,u_1,...,u_m\}$ ששווה לאפס, אבל הקבוצה הנ"ל בסיס של U ובפרט בת"ל ולכן בהכרח המקדמים מתאפסים. סך הכל קיבלנו

$$\lambda_1=....=\lambda_k=\alpha_1=...=\alpha_m=\beta_1=...=\beta_n=0$$

ולכן B בת"ל. ■

10 מרחבי שורות ועמודות של מטריצות

10.1 מרחב השורות של מטריצה

תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, אז ל A יש m שורות, ונוכל לחשוב על כל שורה בתור וקטור ב $\mathbb{F}^n$, כלומר

$$A=\begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_m^T & - \end{pmatrix}_{m\times n}$$

כאשר $v_1,...,v_m\in\mathbb{F}^n$.

הגדרה 10.1 תחת הסימונים לעיל, מרחב השורות של המטריצה A הינו תת המרחב של $\mathbb{F}^n$ הנפרש על ידי שורות A, כלומר

$$\mathcal{R}(A)=Span_{\mathbb{F}}\{v_1,...,v_m\}\subset\mathbb{F}^n$$

דוגמה: עבור המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&-1&1\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\mathcal{R}(A)=Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^3$$

הקבוצה הפורשת היא גם בלתי תלויה לינארית ולכן $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}(A) = 2$.

הוכחנו בתחילת הקורס שפעולות אלמנטריות שומרות על הקבוצה הנפרשת על ידי שורות מטריצה, כלומר הוכחנו את המשפט:

משפט 10.2 יהיו $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות שקולות שורות $A \sim B$. אז

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$$

מסקנה 10.3 כדי למצוא בסיס עבור $\mathcal{R}(A)$ מספיק לדרג את A לצורה קנונית (או מדורגת כלשהי) ולקחת כבסיס את השורות שאינן שורות אפסים. מספר השורות שאינן שורות אפסים, כלומר מספר האיברים הפותחים שווה למימד מרחב השורות $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{R}(A)$.

הוכחה: זה נובע מהמשפט לעיל, יחד עם העובדה שהשורות שאינן אפס במטריצה מדורגת מהוות קבוצה בלתי תלויה לינארית, שכן בכל שורה יש איבר פותח, אותו ניתן לאפס בצירוף לינארי רק בעזרת כפל בסקלר 0. ■

מסקנה 10.4 בהנתן תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנתון כאוסף הצירופים הלינאריים (ספאן) של קבוצה סופית של וקטורים, נוכל למצוא בסיס לתת המרחב על ידי הגדרת מטריצה **ששורותיה** איברי הקבוצה הפורשת, דירוג המטריצה ובחירת השורות שאינן אפס כבסיס. יש לציין שתהליך זה אינו מהווה צמצום של הקבוצה הפורשת לבסיס.

דוגמה: נמצא בסיס לתת המרחב

$$U = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

מדובר בקבוצה פורשת עם שלושה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$ ולכן נגדיר מטריצה $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ להיות המטריצה ששורותיה הוקטורים שבקבוצה הפורשת, ונדרג:

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\1 & -2 & -7\\1 & 2 & 1\end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל H. נשים לב שבאמת קבוצה זו **אינה** צמצום של הקבוצה הפורשת המקורית לבסיס, אלא רק בסיס לתת המרחב הנפרש על ידי הקבוצה.

הערה: באותו אופן נוכל להשלים קבוצה בת"ל לבסיס של $\mathbb{F}^n$. בקבוצה כזאת יהיו $m \leq n$ איברים (אחרת לא יכולה להיות בת"ל). נציב את הוקטורים כשורות מטריצה ונדרג אותה. אם $m < n$ אז יהיו $n-m$ עמודות בהן אין איבר חופשי, ונוכל להוסיף את הוקטורים המתאימים מהבסיס הסטנדרטי כשורות נוספות עד שנקבל מטריצה ריבועית ששורותיה בת"ל. הקבוצה החדשה נשארת בת"ל ולכן השורה שהוספנו לא נמצאת בתת המרחב הנפרש על ידי הוקטורים המקוריים. באופן כזה נוכל להשלים את הקבוצה המקורית לבסיס.

דוגמה: נתבונן בקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$, ראינו שהיא בסיס לתת המרחב H. אם נרצה להשלימה לבסיס של $\mathbb{R}^3$ נגדיר מטריצה ששורותיה הוקטורים הללו:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}$$

בשורה 3 אין איבר פותח, ולכן אם נוסיף לקבוצה את הוקטור $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ היא תשאר בת"ל. עכשיו יש לנו קבוצה בת"ל עם שלושה איברים, ולכן היא בסיס ל $\mathbb{R}^3$.

10.2 מרחב העמודות של מטריצה ומשפט הדרגה

הגדרה 10.5 מרחב העמודות של מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הינו תת המרחב של $\mathbb{F}^m$ הנפרש על ידי עמודות A, כלומר אם

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}_{m\times n}$$

אז

$$\mathcal{C}(A) = Span_{\mathbb{F}}\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{F}^m$$

הערה: נשים לב שאפשר לחשוב על מרחב העמודות גם בשני האופנים הבאים:

$$\mathcal{C}\left(A\right)=Span_{\mathbb{F}}\left\{ v_{1},...,v_{n}\right\} =\left\{ \lambda_{1}v_{1}+...+\lambda_{n}v_{n}|\,\lambda_{1},...,\lambda_{n}\in\mathbb{F}\right\} =\left\{ Au|\,u\in\mathbb{F}^{n}\right\}$$

$$\mathcal{C}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(A^{T}\right)$$

דוגמה: עבור המטריצה $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\in M_{2\times3}\left(\mathbb{R}\right)$ מתקיים

$$\mathcal{C}\left(A\right)=Span_{\mathbb{R}}\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 3\\ -1 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 2\\ 1 \end{array}\right)\right\} \subset\mathbb{R}^{2}$$

הקבוצה פורשת את $\mathbb{R}^{2}$ ולכן $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{C}\left(A\right)=2$.

משפט 10.6 (משפט הדרגה) תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, אז $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{R}\left(A\right)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}\left(A\right)$.

הערה: זה בהחלט לא אומר שמרחבי השורות והעמודות שווים, אפילו אם $m=n$ (אחרת אלו תתי מרחבים של מרחבים וקטורים שונים ואין מה לדבר על שוויון). **הוכחה:** נראה כי לכל $0\le k\le\min\left\{ m,n\right\}$ הטענות הבאות שקולות:

א. $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}\left(A\right)\le k$.

ב. ישנן k עמודות ב A המהוות קבוצה פורשת למרחב העמודות.

ג. קיימות שתי מטריצות $R\in M_{k\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, $C\in M_{m\times k}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $A=CR$.

ד. ישנן k שורות ב A שניתן להציג באמצעותן את שאר השורות כצירופים ליאנריים.

ה. $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{R}\left(A\right)\le k$.

אם נוכיח שכל הטענות הללו שקולות נקבל שלכל $0\le k\le\min\left\{ m.n\right\}$ מתקיים $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}\left(A\right)\le k$ אם ורק אם $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{R}\left(A\right)\le k$ ולכן בהכרח המימדים שווים.

א. $\Leftarrow$ **ב.** : נתון כי מימד מרחב העמודות הוא לכל היותר k, ולכן ניתן לצמצם את קבוצת n העמודות הפורשת את מרחב העמודות לקבוצה פורשת בה יש k איברים בלבד.

ב. $\Leftarrow$ **ג.** : יהיו $c_{1},...c_{k}$ העמודות של A שבעזרתן ניתן להציג את כל עמודות A כצירופים לינאריים. אם $A_{1},..,A_{n}$ הן עמודות A כולן, אז לכל $1\le j\le n$ קיימים מקדמים $\lambda_{1j},...,\lambda_{kj}\in\mathbb{F}$ המקיימים

$$A_{j}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ij}c_{i}$$

כלומר

$$A=\begin{pmatrix} | & & | \\ A_1 & \cdots & A_n \\ | & & | \end{pmatrix}_{m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ c_1 & \cdots & c_k \\ | & & | \end{pmatrix}}_{=C\in M_{m\times k}(\mathbb{F})} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ & & \\ \lambda_{k1} & & \lambda_{kn} \end{pmatrix}}_{=R\in M_{k\times n}(\mathbb{F})}$$

ולכן $A=CR$.

ג. $\Leftarrow$ **א.** : נניח כי אכן $A=CR$, אז מהגדרת הכפל נובע כי עמודות A הן צירופים לינאריים של עמודות C. במטריצה C יש k עמודות ולכן $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(C)\leq k$. כיוון שהמרחב הנפרש על ידי עמודות A מוכל במרחב הנפרש על ידי עמודות C נקבל כי $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(A)\leq k$.

באותו האופן בדיוק, רק עבור מרחב השורות של A ובעזרת הגדרת כפל מטריצות כצירופים לינאריים של השורות, נקבל כי **ה.** $\Leftarrow$ **ד.** $\Leftarrow$ **ג.** $\Leftarrow$ **ה.** (תרגיל). סך הכל קיבלנו את משפט הדרגה. ■

דוגמה: בדוגמה הקודמת $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ קיבלנו שמרחב השורות הוא תת מרחב $\mathcal{R}(A)\subset\mathbb{R}^3$ ממימד 2, ומרחב העמודות הוא תת מרחב $\mathcal{C}(A)\subset\mathbb{R}^2$ גם הוא ממימד 2.

מסקנה 10.7 יהיו $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות שקולות שורות $A\sim B$. אז $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(A)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(B)$.

הוכחה: על פי משפט קודם ומשפט הדרגה מתקיים $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(A)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{R}(A)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{R}(B)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(B)$. ■

הערה: המרחבים הללו שונים. למשל, מוקדם יותר דירגנו מטריצה וקיבלנו:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

אז ברור שמרחבי העמודות שונים, כי למשל ב $\mathcal{C}(B)$ המקדם השלישי בכל וקטור בהכרח שווה לאפס בעוד ב $\mathcal{C}(A)$ זה לא כך, אבל $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(A)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(B)=2$.

מסקנה 10.8 בהנתן תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנתון על ידי קבוצה פורשת סופית, נוכל למצוא את מימד תת המרחב בעזרת מטריצה **שעמודותיה** איברי הקבוצה הפורשת. מספר האיברים הפותחים בצורה המדורגת שווה למימד המרחב.

הגדרה 10.9 תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. **הדרגה** של A הינה

$$\text{rank}A=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{C}(A)=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{R}(A)$$

תכונות: ניתן לנסח את מה שהוכחנו לעיל בעזרת הדרגה:

- אם $A\sim B$ אז $\text{rank}A=\text{rank}B$.
- $\text{rank}A^T=\text{rank}A$.
- $A=0$ אם ורק אם $\text{rank}A=0$.
- $\text{rank}A=$ מספר האיברים הפותחים בצורה המדורגת $=$ מספר השורות שאינן אפס בצורה המדורגת.
- לכל $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $\text{rank}A\le\min\{m,n\}$.
- אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ ריבועית אז A הפיכה אם ורק אם $\text{rank}A=n$.
- אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אז למערכת $(A|0)$ פתרון יחיד אם ורק אם $\text{rank}A=n$.

טענה 10.10 אם A,B מטריצות עבורן המכפלה AB מוגדרת אז $\text{rank}AB\le\min\{\text{rank}A,\text{rank}B\}$.

הוכחה: עמודות AB הן צירופים לינארים של עמודות A ולכן $\mathcal{C}(AB)\subset\mathcal{C}(A)$. בדומה, שורות AB הן צירופים לינארים של שורות B ולכן $\mathcal{R}(AB)\subset\mathcal{R}(B)$ ולכן הדרגה של AB היא לכל היותר דרגת A ולכל היותר דרגת B, כלומר לכל היותר הקטנה מבין השתיים. ■

טענה 10.11 אם $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אז $\text{rank}(A+B)\le\text{rank}A+\text{rank}B$.

הוכחה: נשים לב שניתן לכתוב את $A+B$ כמכפלת **מטריצות בלוקים** באופן הבא

$$A+B=\begin{pmatrix} I_m & I_m\end{pmatrix}_{m\times 2m}\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}_{2m\times 2n}\begin{pmatrix} I_n\\ I_n\end{pmatrix}_{2n\times n}$$

ולכן, מהטענה הקודמת

$$\text{rank}(A+B)\le\text{rank}\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=\text{rank}A+\text{rank}B$$

■

10.3 צמצום קבוצה פורשת לבסיס עבור תת מרחב של $\mathbb{F}^n$

מוקדם יותר ראינו כיצד בהנתן תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנתון כאוסף הצירופים הלינאריים של קבוצה סופית של וקטורים, נוכל למצוא בסיס כלשהו לתת המרחב הזה. נציג כאן דרך למציאת בסיס המהווה **צמצום** של הקבוצה הפורשת הנתונה.

טענה 10.12 תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה שעמודותיה $v_1,...,v_n$, ונניח שעמודות הצורה המדורגת של A הן $\widetilde{v}_1,...,\widetilde{v}_n$. יהיו $i_1,...,i_k$ מספרי העמודות בהן יש איברים פותחים בצורה המדורגת, כלומר $\widetilde{v}_{i_j}$ עמודות עם איברים פותחים, אז העמודות המתאימות $v_{i_1},..,v_{i_k}$ מהוות בסיס למרחב העמודות $\mathcal{C}\left(A\right)$.

דוגמה: נצמצם את הקבוצה

$$H=\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\right\} \subset\mathbb{R}^3$$

לקבוצה בת"ל, כלומר נמצא בסיס לתת המרחב שנפרש על ידי איברי הקבוצה. נציב כעמודות במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&3&1&0\\2&6&0&-4\\1&3&1&0\end{pmatrix}\dashrightarrow\begin{pmatrix}\mathbf{1}&3&\mathbf{0}&-2\\\mathbf{0}&0&\mathbf{1}&2\\\mathbf{0}&0&\mathbf{0}&0\end{pmatrix}$$

בעמודות $1,3$ יש איבר פותח ולכן $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס לתת המרחב $Span_{\mathbb{R}}H$.

הערה: שימו לב שהעמודות של הצורה המדורגת לא פורשות את מרחב העמודות של המטריצה המקורית.

הסבר: נדגים את רעיון ההוכחה עבור הדוגמה לעיל:

נסמן את המטריצה המקורית ב A ואת עמודותיה ב $v_1,...,v_4$, ואת את הצורה הקנונית שמימין ב $\widetilde{A}$ ואת עמודותיה ב $\widetilde{v}_1,...,\widetilde{v}_4$. בצורה הקנונית, קבוצת העמודות בהן יש איבר פותח היא בת"ל כתת קבוצה של הבסיס הסטנדרטי. כל עמודה שאין בה איבר פותח היא צ"ל של העמודות בהן יש איברים פותחים המופיעות לשמאלה, ובפרט העמודות $\{\widetilde{v}_1,\widetilde{v}_3\}$ בהן איברים פותחים מהוות בסיס של $\mathcal{C}\left(\widetilde{A}\right)$.

נבטא אם כן את $\widetilde{v}_2,\widetilde{v}_4$ באמצעות אבירי הבסיס

$$\begin{cases}\widetilde{v}_2=3\widetilde{v}_1\\\widetilde{v}_4=-2\widetilde{v}_1+2\widetilde{v}_3\end{cases}$$

כלומר

$$\begin{cases}3\widetilde{v}_1-\widetilde{v}_2&=0\\-2\widetilde{v}_1+2\widetilde{v}_3-\widetilde{v}_4&=0\end{cases}$$

מכאן $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ פתרונות למערכת $\left(\widetilde{A}|0\right)$. אבל $A \sim \widetilde{A}$ ולכן הם פתרונות גם למערכת $(A|0)$. כלומר

$$\begin{cases} 3v_1 - v_2 & = 0 \\ -2v_1 + 2v_3 - v_4 & = 0 \end{cases}$$

ובהתאם

$$\begin{cases} v_2 = 3v_1 \\ v_4 = -2v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

המסקנה מכל זה היא שהיחסים בין העמודות נשמרים בדירוג, וכל זאת כיוון שפתרונות של מערכת הומוגנית נשמרים תחת דירוג. לכן, אם $\{\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_3\}$ בסיס של $\mathcal{C}\left(\widetilde{A}\right)$ אז $\{v_1, v_3\}$ בסיס של $\mathcal{C}(A)$.

10.4 המרחב המאפס של מטריצה ונוסחת הדרגה והאפסות

הגדרה 10.13 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $(A|0)$, הנקראת גם **המאפס** של A, הינה

$$\mathcal{N}(A) = \{v \in \mathbb{F}^n | \, Av = 0\}$$

המאפס הינו תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ והמימד שלו נקרא גם **האפסות של** A.

משפט 10.14 (נוסחת הדרגה והאפסות) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, אז

$$\text{rank}A + \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{N}(A) = n$$

הוכחה: נניח $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{N}(A) = k$ ונניח $\{v_1, ..., v_k\} \subset \mathcal{N}(A)$ בסיס למאפס. נשלים בסיס זה לבסיס של $\mathbb{F}^n$ על ידי $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_{n-k}\}$. נזכור שראינו כי $\mathcal{C}(A) = \{Au | \, u \in \mathbb{F}^n\}$. אם נראה ש $B = \{Aw_1, ..., Aw_{n-k}\}$ בסיס של $\mathcal{C}(A)$ אז $\text{rank}A = n - k$ כנדרש.

B פורשת: נראה כי כל איבר ב $\mathcal{C}(A)$ ניתן להצגה כצ"ל של איברי B, כלומר שלכל $u \in \mathbb{F}^n$ האיבר Au ניתן להצגה כצ"ל של איברי B. יהי $u \in \mathbb{F}^n$, נציגו כצ"ל של איברי הבסיס של $\mathbb{F}^n$

$$u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k + \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_{n-k} w_{n-k}$$

ונכפול את שני האגפים משמאל במטריצה A

$$Au=\underbrace{\lambda_1 Av_1+...+\lambda_k Av_k}_{=0}+\alpha_1 Aw_1+...+\alpha_{n-k}Aw_{n-k}$$

ולכן Au צ"ל של איברי B.

B בלתי תלויה לינארית: נניח כי $\lambda_1(Aw_1)+...+\lambda_{n-k}(Aw_{n-k})=0$. כלומר

$$A(\lambda_1 w_1+...+\lambda_{n-k}w_{n-k})=0$$

ולכן $\lambda_1 w_1+...+\lambda_{n-k}w_{n-k}\in\mathcal{N}(A)$, כלומר קיימים $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$ כך ש

$$\lambda_1 w_1+...+\lambda_{n-k}w_{n-k}=\alpha_1 v_1+...+\alpha_k v_k$$

כלומר

$$\lambda_1 w_1+...+\lambda_{n-k}w_{n-k}-\alpha_1 v_1-...-\alpha_k v_k=0$$

אבל $\{v_1,...,v_k,w_1,...,w_{n-k}\}$ בסיס למרחב ולכן המקדמים כולם מתאפסים, ובפרט $\lambda_1=..=\lambda_{n-k}=0$ והקבוצה בת"ל. ∎

הערה: נשים לב שהשוויון הוא במימדים בלבד, המרחבים עצמם אינם תתי מרחבים של אותו מרחב וקטורי באופן כללי.

מסקנה 10.15 האפסות של A הינה מספר העמודות ללא איבר פותח בצורה הקנונית של A.

מסקנה 10.16 בעבר, כשמצאנו פתרונות למערכת משוואות הומוגנית הם תמיד נראו מהצורה $s_1v_1+....s_kv_k$ כאשר $s_1,...,s_k$ היו פרמטרים שהגיעו מהעמודות שללא איבר פותח, ובעצם רשמנו $Span_{\mathbb{F}}\{v_1,...,v_k\}=\mathcal{N}(A)$. כיוון ש $\{v_1,...,v_k\}$ פורשת את $\mathcal{N}(A)$ ומהמסקנה הקודמת המימד של $\mathcal{N}(A)$ הוא בדיוק k, אז $\{v_1,...,v_k\}$ מהווה בסיס למרחב המאפס, שהוא מרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית.

דוגמה: עבור $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&1\end{pmatrix}$ קל לראות שהעמודות בת"ל ולכן $\mathrm{rank}A=2$. מנוסחת הדרגה

$$\dim\mathcal{N}(A)=n-\mathrm{rank}A=2-2=0$$

ולכן בהכרח הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית המתאימה ל A הוא הפתרון הטריוויאלי.

דוגמה: עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ קל לראות שהשורות בת"ל ולכן $\text{rank}A=2$. מנוסחת הדרגה

$$\dim\mathcal{N}\left(A\right)=n-\text{rank}A=3-2=1$$

ולכן מרחב הפתרונות הוא חד מימדי. ואכן

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\dashrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&1&0\end{array}\right)$$

כלומר

$$\mathcal{N}\left(A\right)=\left\{\begin{pmatrix}2s\\-s\\s\end{pmatrix}\mid s\in\mathbb{R}\right\}=Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

10.5 מציאת מטריצה המתאימה לתת מרחב

כפי שראינו, לכל מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ יש מרחב מאפס $\mathcal{N}\left(A\right)\subset\mathbb{F}^n$ מתאים. נראה כעת כי לכל תת מרחב וקטורי $U\subset\mathbb{F}^n$ יש מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $U=\mathcal{N}\left(A\right)$. נניח כי $U=Span_{\mathbb{F}}\left\{v_1,...,v_m\right\}$, אז

$$U=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\cdots&v_m\\|&&|\end{pmatrix}}_{=C\in M_{n\times m}(\mathbb{F})}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}\mid\lambda_1,...,\lambda_m\in\mathbb{F}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n\mid\text{The system }(C|b)\text{ has a solution}\right\}$$

אם נדרג את $(C|b)$, הוקטורים $\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ עבורם למערכת יש פתרון, יהיו בדיוק אילו עבורם לא תתקבל שורת סתירה. כלומר הם יהיו הפתרונות של המערכת ההומוגנית שתתקבל כדי לאפס את איברי עמודת המקדמים החופשיים הניצבים מול שורות האפסים שמתקבלות לאחר דירוג המטריצה C.

דוגמה: תהי $U=Span_{\mathbb{R}}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$. אז

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & b_1\\2 & 1 & b_2\\1 & -2 & b_3\end{array}\right)\dashrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & b_1\\0 & 1 & b_2-2b1\\0 & 0 & b_3+2b_2-5b_1\end{array}\right)$$

והמערכת שקיבלנו היא

$$\begin{cases}-5b_1+2b_2+b_3 & =0\end{cases}$$

לכן המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

היא בדיוק זאת המקיימת $U=\mathcal{N}\left(A\right)$.

דוגמה לשימוש: אם נרצה למצוא חיתוך של תתי מרחבים נוכל למצוא את מערכת המשוואות שמגדירה כל אחד מהם, ואיחוד המערכות הללו למערכת אחת יתן לנו את המטריצה שהמאפס שלה הוא החיתוך (כי מדובר בוקטורים שמקיימים גם את המערכת הראשונה וגם את השניה, כלומר הם בחיתוך).

11 העתקות (טרנספורמציות) לינאריות

11.1 הגדרה ודוגמאות

הגדרה 11.1 יהיו V,W שני מרחבים וקטורים (לאו דווקא שונים) מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. העתקה $T:V\to W$, כלומר פונקציה המתאימה לכל $v\in V$ וקטור $T\left(v\right)\in W$, נקראת **העתקה לינארית** אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. חיבוריות: לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים

$$T\underbrace{\left(v_1+v_2\right)}_{\text{addition in }V}=\underbrace{T\left(v_1\right)+T\left(v_2\right)}_{\text{addition in }W}$$

ב. הומוגניות: לכל $v\in V$ ולכל $\lambda\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$T\underbrace{\left(\lambda\cdot v\right)}_{\text{mult. in }V}=\underbrace{\lambda\cdot T\left(v\right)}_{\text{mult. in }W}$$

למרחב V קוראים מרחב **המקור** ולמרחב W קוראים מרחב **הטווח**.

טענה 11.2 תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית ויהיו $0_V\in V$ ו $0_W\in W$ וקטורי האפס במרחבים הללו, אז

$$T\left(0_V\right)=0_W$$

הוכחה: יהי $v\in V$ וקטור כלשהו, אז $T\left(0_V\right)=T\left(0\cdot v\right)=0\cdot T\left(v\right)=0_W$. ■

טענה 11.3 תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, אז לכל $k\in\mathbb{N}$, לכל $v_1,...,v_k\in V$ ולכל $\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$T\left(\lambda_1v_1+...+\lambda_kv_k\right)=T\left(\lambda_1v_1\right)+...+T\left(\lambda_kv_k\right)=\lambda_1T\left(v_1\right)+...+\lambda_kT\left(v_k\right)$$

או בקיצור

$$T\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{k}T\left(\lambda_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iT\left(v_i\right)$$

הוכחה: באינדוקציה על k, כאשר השוויון הראשון נובע מהתכונה הראשונה של ההעתקה הלינארית, והשוויון השני נובע מהתכונה השניה. ■

הערה: תכונת ההעתקה ביחס לצירופים לינארים מספיקה כדי להוכיח לינאריות. יתר על כן הגדרה שקולה להיותה של ההעתקה לינארית היא שלכל $v,u\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$T\left(\alpha v+\beta u\right)=\alpha T\left(v\right)+\beta T\left(u\right)$$

הטענה הקודמת מראה שההגדרה המקורית גוררת את ההגדרה השקולה. את הכיוון ההפוך נקבל מבחירת $\alpha=\beta=1$ לתנאי א', ו $\beta=0$ לתנאי ב'.

דוגמאות:

1. לכל מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ נוכל להגדיר את העתקה הזהות $T:V\to V$ המקיימת $T\left(v\right)=v$ לכל $v\in V$. את העתקת הזהות מסמנים לפעמים ב Id או ב Id_V. העתקת הזהות היא אכן העתקה לינארית (לפי ההגדרה המקורית):

   (א) יהיו $v_1,v_2\in V$ אז

$$Id\left(v_1+v_2\right)=v_1+v_2=Id\left(v_1\right)+Id\left(v_2\right)$$

(ב) תהי $v \in V$ ו $\lambda \in \mathbb{F}$ אז

$$Id\left(\lambda v\right)=\lambda v=\lambda\cdot Id\left(v\right)$$

2. לכל זוג מרחבים וקטורים V,W מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, נגדיר את העתקת האפס $T:V\to W$ המקיימת $T\left(v\right)=0_W$ לכל $v\in V$. את העתקת האפס מסמנים לפעמים ב 0 או ב $0_{V,W}$. העתקת האפס היא אכן העתקה לינארית (לפי ההגדרה השקולה): יהיו $v,u\in V$ ו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אז

$$0_{V,W}\left(\alpha v+\beta u\right)=0_W=0_W+0_W=\alpha\cdot0_{V,W}\left(v_1\right)+\beta\cdot0_{V,W}\left(v\right)$$

3. תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, אז ההעתקה $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ הנתונה על ידי $T_A\left(v\right)=Av$ היא העתקה לינארית, התכונות נובעות ישירות מתכונות כפל המטריצה ב־n־יה:

$$T_A\left(\alpha v+\beta u\right)=A\left(\alpha v+\beta u\right)=\alpha Av+\beta Au=\alpha T_A\left(v\right)+\beta T_A\left(u\right)$$

למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ מגדירה העתקה $T_A=\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T_A\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+3z\\4x+5y+6z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

המעבירה למשל

$$T\left(\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$$

בהמשך נראה שלכל העתקה $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ קיימת ויחידה מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $T=T_A$. למשל להעתקת האפס תתאים מטריצת האפס $0=T_0$, ואם $n=m$ אז להעתקת הזהות תתאים מטריצת היחידה $Id=T_{I_n}$.

4. $T:\mathbb{R}_n\left[x\right]\to\mathbb{R}_n\left[x\right]$ העתקת הנגזרת, כלומר $T\left(p\left(x\right)\right)=p'\left(x\right)$. מחוקי הגזירה היא אכן העתקה לינארית: לכל $p\left(x\right),q\left(x\right)\in\mathbb{R}_n\left[x\right]$ ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$T\left(\alpha p\left(x\right)+\beta q\left(x\right)\right)=\left(\alpha p\left(x\right)+\beta q\left(x\right)\right)'=\alpha p'\left(x\right)+\beta q'\left(x\right)=\alpha T\left(p\left(x\right)\right)+\beta T\left(q\left(x\right)\right)$$

5. ההעתקה $T:M_{2\times3}\to\mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת על ידי

$$T\left(\left(\begin{array}{ccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{array}\right)\right)=(a_{11}+a_{23})+2a_{22}x+(a_{13}-3a_{21})x^3$$

היא לינארית - תרגיל.

6. יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=(v_1,...,v_n)\subset V$ בסיס סדור (כלומר בסיס, וסדר איבריו קבוע ובעל חשיבות). לכל $v\in V$ קיימת ויחידה הצגה $v=\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n$, נסמן את n־ית המקדמים ב $\left(\begin{array}{c}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{array}\right)\in\mathbb{F}^n$ $=[v]_B$. ההעתקה $T:V\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת על ידי $T(v)=[v]_B$ היא העתקה לינארית הנקראת העתקת הקואורדינטות ביחס לבסיס B, ונעסוק בה בהמשך באופן מעמיק.

הערה: ישנן כמובן העתקות שאינן לינאריות, למשל ההעתקה $T:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ המוגדרת על ידי $T(x)=x+1$. היא לא לינארית למשל כי 0 לא עובר ל 0.

משפט 11.4 העתקה לינארית נקבעת ביחידות על פי ערכי ההעתקה על וקטורי בסיס במקור, כלומר בהנתן מרחבים וקטורים V,W מעל שדה $\mathbb{F}$ ובהנתן בסיס $B=\{v_1,...,v_n\}\subset V$ וקבוצת איברים כלשהי $\{w_1,...,w_n\}\subset W$, קיימת ויחידה העתקה לינארית $T:V\to W$ המקיימת $T(v_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n$.

הוכחה: קיום: נגדיר את T בעזרת הבסיס B. לכל $v\in V$ קיימים ויחידים $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{F}$ עבורם $v=\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n$, אז נגדיר בעזרת המקדמים הללו

$$T(v)=\lambda_1w_1+...+\lambda_nw_n$$

קל לוודא שזאת העתקה לינארית המקיימת את תנאי המשפט.

יחידות: נניח $S:V\to W$ העתקה לינארית המקיימת גם היא $S(v_i)=w_i$ לכל $1\le i\le n$. אז לכל $v\in V$ מתקיים

$$S(v)=S(\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n)=\lambda_1S(v_1)+...+\lambda_nS(v_n)=\lambda_1w_1+...+\lambda_nw_n$$

ולכן $S=T$. ■

הערות:

1. קיבלנו שמספיק לקבוע מספר קטן של וקטורים (כמימד המרחב במקור) כדי לקבוע את ההעתקה הלינארית כולה.

2. באופן דומה בהנתן קבוצה בת"ל $\{v_1,...,v_n\}\subset V$ וקבוצת ערכים $\{w_1,...,w_n\}\subset W$ שנרצה להתאים לה, ניתן להגדיר העתקה לינארית שתתאים את איברי הקבוצה לערכים הדרושים.

3. אם הקבוצה במרחב המקור היא תלויה לינארית אז לא תמיד ניתן לעשות זאת. ניתן להראות שהתנאי הדרוש הוא שהצירופים הלינארים שמבטאים את האפס יעשו זאת גם במרחב הטווח, כלומר שאם $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0_V$ אז גם $\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n = 0_W$ (זה בודאי קורה עבור קבוצה בת"ל שכן הצירוף היחיד העונה על התנאי הוא הצירוף הטריוויאלי).

דוגמה : לא קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

כי אם היתה קיימת T כזאת אז בהכרח

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

בסתירה לכך שהאפס חייב לעבור לאפס.

11.2 גרעין ותמונה

הגדרה 11.5 תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, אז הגרעין של ההעתקה T הינו קבוצת הוקטורים במקור V שההעתקה T מעבירה לאפס של הטווח, כלומר:

$$\ker T = \{v \in V | \, T(v) = 0_W\} \subset V$$

והתמונה של ההעתקה T הינה קבוצת הוקטורים בטווח W עבורם קיים מקור תחת T ב V, כלומר

$$\mathrm{Im} T = \{w \in W | \, \text{There exists } v \in V \text{ such that } T(v) = w\} \subset W$$

דוגמאות:

1. עבור העתקת הזהות $Id : V \to V$ הגרעין הוא $\ker Id = \{0_V\}$ והתמונה היא $\mathrm{Im} Id = V$.

2. עבור העתקת האפס $0_{V,W} : V \to W$ הגרעין $\ker 0_{V,W} = V$ והתמונה $\mathrm{Im} 0_{V,W} = \{0_W\}$

3. עבור $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ הנתונה על ידי $T_A(v) = Av$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הגרעין הוא המאפס $\ker T_A = \mathcal{N}(A)$ והתמונה היא מרחב העמודות $\mathrm{Im} T_A = \mathcal{C}(A)$.

4. נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to M_2(\mathbb{R})$ על ידי

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix} a-b & b-c \\ a-c & c-b \end{pmatrix}$$

קל להראות שזוהי העתקה לינארית, נמצא גרעין ותמונה.

(א) **גרעין:** כל הפולינומים ש T מעבירה לאיבר האפס ב $M_2(\mathbb{R})$:

$$\ker T=\left\{a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]\mid \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ a-c & c-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

עלינו לפתור את מערכת ההומוגנית עם ארבע משוואות ושלושה משתנים a,b,c המופיעה בביטוי לעיל. נציב במטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הפתרונות למערכת הם $S=\left\{\begin{pmatrix} s \\ s \\ s \end{pmatrix}\mid s\in\mathbb{R}\right\}$ ולכן

$$\ker T=\left\{s+sx+sx^2\in\mathbb{R}_2[x]\mid s\in\mathbb{R}\right\}=Span_{\mathbb{R}}\left\{1+x+x^2\right\}$$

ובפרט $\dim_{\mathbb{R}}\ker T=1$.

(ב) **תמונה:** כל המטריצות שמתקבלות על ידי T:

$$\mathrm{Im}T=\left\{\begin{pmatrix} a-b & b-c \\ a-c & c-b \end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

כלומר התמונה היא מטריצות $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ עבורן קיימים a,b,c כך ש $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & b-c \\ a-c & c-b \end{pmatrix}$,
כלומר כאלה שעבורן קיים פתרון למערכת המשוואות הנתונה על ידי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & -1 & \gamma \\ 0 & -1 & 1 & \delta \end{array}\right) \dashrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha+\beta \\ 0 & 1 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-\alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \delta+\beta \end{array}\right)$$

הדרישה היא שלא יהיו שורות סתירה, כלומר $\mathrm{Im}T=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\mid\begin{cases}\gamma-\alpha-\beta & =0\\ \delta+\beta & =0\end{cases}\right\}$
נפתור את המערכת ההומוגנית עם שתי משוואות וארבעה משתנים

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\dashrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

והפתרון

$$\left\{\begin{pmatrix}s+t\\ -t\\ s\\ t\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

כלומר

$$\mathrm{Im}T=\left\{\begin{pmatrix}s+t & -t\\ s & t\end{pmatrix}\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}=Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

ובפרט $\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Im}T=2$.

טענה 11.6 תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. אז $\ker T\subset V$ ו $\mathrm{Im}T\subset W$ שניהם תתי מרחבים וקטוריים.

הוכחה: עבור הגרעין, נראה ששלושת התנאים לתת מרחב וקטורי מתקיימים:

א. לכל העתקה מתקיים $T\left(0_V\right)=0$ ולכן $0_V\in\ker T$.

ב. יהיו $u,v\in\ker T$, לכן $T\left(v+u\right)=T\left(v\right)+T\left(u\right)=0+0=0$ ולכן $v+u\in\ker T$.

ג. יהיו $v\in\ker T$ ו $\lambda\in\mathbb{F}$, אז $T\left(\lambda v\right)=\lambda T\left(v\right)=\lambda\cdot0=0$ ולכן $\lambda v\in\ker T$

עבור התמונה, נראה ששלושת התנאים לתת מרחב וקטורי מתקיימים:

א. לכל העתקה מתקיים $T\left(0\right)=0_W$ ולכן $0_W\in\mathrm{Im}T$.

ב. יהיו $w_1,w_2\in\mathrm{Im}T$ כלומר קיימים $v_1,v_2\in V$ המקיימים $T\left(v_1\right)=w_1,\ T\left(v_2\right)=w_2$. לכן

$$T\left(v_1+v_2\right)=T\left(v_1\right)+T\left(v_2\right)=w_1+w_2$$

ולכן $w_1+w_2\in\mathrm{Im}T$.

ג. יהיו $w\in\mathrm{Im}T$ ו $\lambda\in\mathbb{F}$, אז קיים $v\in V$ עבורו $T\left(v\right)=w$. אז $T\left(\lambda v\right)=\lambda T\left(v\right)=\lambda w$ ולכן $\lambda w\in\mathrm{Im}T$. ■

הגדרה 11.7 תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

1. T נקראת חד־חד ערכית (חח"ע) אם $T\left(v\right)=T\left(u\right)$ גורר שבהכרח $v=u$, או במילים אחרות, לכל איבר בתמונה יש מקור יחיד תחת T. העתקה לינארית חח"ע נקראת גם **מונומורפיזם**.

2. T נקראת על אם לכל $w\in W$ קיים $v\in V$ עבורו $T\left(v\right)=w$, כלומר אם $W=\mathrm{Im}T$. נקראת גם **אפימורפיזם**.

3. העתקה לינארית שהיא חח"ע ועל נקראת **איזומורפיזם**.

טענה 11.8 T חח"ע אם ורק אם $\ker T=\left\{0_{V}\right\}$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נניח כי T חח"ע. ראשית $0_{V}\in\ker T$ כי T העתקה לינארית. לכל $v\in V$ עבורו $T\left(v\right)=0_{W}$ אז $T\left(v\right)=T\left(0_{V}\right)$ ומחד חד ערכיות $v=0_{V}$.

$(\Rightarrow)$ נניח $\ker T=\left\{0_{V}\right\}$, ונניח $T\left(u\right)=T\left(v\right)$. אז מלינאריות T מתקיים

$$T\left(u-v\right)=T\left(u\right)-T\left(v\right)=0_{W}$$

ולכן $u-v\in\ker T$. מכאן שבהכרח $u-v=0$ ולכן $u=v$ וההעתקה T היא חח"ע. ■

דוגמה: תהי $T_{A}:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ הנתונה על ידי $T_{A}\left(v\right)=Av$, $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, כפי שראינו מקודם הגרעין הוא המאפס $\ker T_{A}=\mathcal{N}\left(A\right)$ והתמונה היא מרחב העמודות $\mathrm{Im}T_{A}=\mathcal{C}\left(A\right)$, ועל כן:

1. T_{A} היא חח"ע אם ורק אם העמודות של A בת"ל, שכן אז למערכת ההומוגנית המתאימה יש פתרון טריוויאלי בלבד, כלומר $\ker T_{A}=\mathcal{N}\left(A\right)=\left\{0\right\}$.

2. T_{A} היא על אם ורק אם עמודות A פורשות את $\mathbb{F}^{m}$, שכן אז מרחב העמודות של A הוא המרחב כולו, כלומר $\mathrm{Im}T=\mathcal{C}\left(A\right)=\mathbb{F}^{m}$.

3. T_{A} היא איזומורפיזם אם ורק אם שני התנאים הנ"ל מתקיימים, וזה קורה אם ורק אם A מטריצה הפיכה.

תרגיל: תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

1. אם T חח"ע ו $\left\{v_{1},...,v_{n}\right\}\subset V$ בת"ל, אז גם $\left\{T\left(v_{1}\right),...,T\left(v_{n}\right)\right\}\subset W$ בת"ל.

2. אם T על ו $\left\{v_{1},...,v_{n}\right\}\subset V$ פורשת, אז גם $\left\{T\left(v_{1}\right),...,T\left(v_{n}\right)\right\}\subset W$ פורשת.

3. אם T איזומורפיזם ו $\left\{v_{1},...,v_{n}\right\}\subset V$ בסיס, אז גם $\left\{T\left(v_{1}\right),...,T\left(v_{n}\right)\right\}\subset W$ בסיס.

הגדרה 11.9 יהי $T:V\to W$ איזומורפיזם, אז לכל $w\in W$ קיים ויחיד $v\in V$ עבורו $T\left(v\right)=w$ ולכן ניתן להגדיר את ההעתקה $T^{-1}:W\to V$ המוגדרת על ידי $T^{-1}\left(w\right)=v$. העתקה זאת נקראת ההעתקה ההופכית ל T.

דוגמה: אם $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ איזומורפיזם, אז המטריצה המגדירה את ההעתקה A היא מטריצה הפיכה ומתקיים $T^{-1} = T_{A^{-1}}$.

טענה 11.10 ההעתקה ההופכית היא העתקה לינארית, והיא איזומורפיזם.

הוכחה: יהיו $w_1, w_2 \in W$, אז קיימים $v_1, v_2 \in V$ עבורם $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2$. יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ אז כיוון ש T היא העתקה לינארית מתקיים $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha w_1 + \beta w_2$, ולכן

$$T^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + \beta T^{-1}(w_2)$$

בנוסף T^{-1} היא חח"ע כי T היא העתקה מוגדרת היטב, כלומר לכל ערך $v \in V$ יש תמונה אחת בלבד $T(v) \in W$. היא על כי T מוגדרת על V כולה, כלומר לכל $v \in V$ קיים $w = T(v)$ ולכן לכל $v \in V$ קיים מקור ב W תחת T^{-1}. ■

11.3 נוסחת מימדי התמונה והגרעין

משפט 11.11 (נוסחת מימדי התמונה והגרעין) תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, אז

$$\dim_{\mathbb{F}} \ker T + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}T = \dim_{\mathbb{F}} V$$

הערה: זוהי הכללה של נוסחת הדרגה והאפסות, כאשר $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{N}(A) = \dim_{\mathbb{F}} \ker T$, $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}T = \mathrm{rank}A$, $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.
ההוכחה למשפט זהה להוכחת נוסחת הדרגה והאפסות, צריך רק לשנות אותיות.

דוגמה: בדוגמה קודמת עסקנו בהעתקה $T : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$. מצאנו את הגרעין וראינו $\dim_{\mathbb{R}} \ker T = 1$, ומצאנו את התמונה וראינו $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}T = 2$. בנוסף $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] = 3$, ואכן $1 + 2 = 3$.

טענה 11.12 יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$.

א. אם קיימת $T : V \to W$ העתקה לינארית חח"ע, אז $\dim_{\mathbb{F}} V \le \dim_{\mathbb{F}} W$

ב. אם קיימת $T : V \to W$ העתקה לינארית על, אז $\dim_{\mathbb{F}} V \ge \dim_{\mathbb{F}} W$.

ג. אם קיימת $T : V \to W$ העתקה לינארית שהיא איזומורפיזם אז $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$.

הוכחה: אם T חח"ע אז $\dim_{\mathbb{F}} \ker T = 0$ ולכן

$$\dim_{\mathbb{F}} W \ge \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}T + 0 = \dim_{\mathbb{F}} V$$

אם T על אז $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}T = \dim_{\mathbb{F}} W$ ולכן

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \ker T + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}T \ge \dim_{\mathbb{F}} W$$

אם T איזומופריזם אז שני אי השוויונים מתקיימים ולכן שוויון. ■

מסקנה 11.13 תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית, ונניח כי $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$. אז התאים הבאים שקולים:

א. T חח"ע. ב. T על. ג. T איזומורפיזם.

הגדרה 11.14 אם קיים איזומורפיזם $T : V \to W$ אז U, W נקראים מרחבים **איזומורפיים** ומסמנים $V \cong W$.

ראינו שאם $V \cong W$ אז $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$, נראה כי גם ההפך נכון:

טענה 11.15 יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ונניח כי $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$, אז V, W איזומורפיים.

הוכחה: מהמסקנה הקודמת מספיק להגדיר העתקה לינארית $T : V \to W$ שהיא חח"ע. יהיו $B_V = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ ו $B_W = \{w_1, ..., w_n\} \subset W$ בסיסים ותהי T ההעתקה שמקיימת $T(v_i) = w_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ (ראינו מוקדם יותר שקיימת ויחידה העתקה כזאת). ההעתקה היא חח"ע, שכן מתקיים

$$T(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n$$

כלומר כל וקטור בתמונה הוא צירוף לינארי של איברי B_W. צירוף כזה שווה אפס רק כאשר המקדמים כולם מתאפסים, כלומר הגרעין הוא טריוויאלי. ■

מסקנה 11.16 $M_{m \times n}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{mn} \cong \mathbb{F}_{mn-1}[x]$.

נראה כעת כי משפט המימדים נובע ממשפט מימדי התמונה והגרעין:

משפט 11.17 נוסחת המימדים

$$\dim_{\mathbb{F}}(U + W) = \dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} W - \dim_{\mathbb{F}}(U \cap W)$$

עבור $U, W \subset V$ תתי מרחבים של מרחב וקטורי כלשהו.

הגדרה 11.18 יהיו U, W מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, אז מרחב המכפלה מוגדר על ידי

$$U \times W = \{(u, w) \mid u \in U,\, w \in W\}$$

המרחב הזה מורכב מזוגות סדורים של וקטורים, בכל זוג וקטור מ U ווקטור מ W. הפעולות במרחב הזה נלקחות מהפעולות במרחבים U, W כלומר אם $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in U \times W$ ו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ אז

$$\alpha(u_1, w_1) + \beta(u_2, w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha w_1 + \beta w_2) \in U \times W$$

ושאר תכונות המרחב הוקטורי נובעות מקיומן ב U וב W.

נשים לב שאם $\{u_1,...,u_k\} \subset U$ ו $\{w_1,..,w_l\} \subset W$ בסיסים של תתי המרחבים אז

$$\{(u_1,0),...,(u_k,0),(0,w_1),...,(0,w_l)\} \subset U \times W$$

בסיס של מרחב המכפלה, ולכן $\dim_{\mathbb{F}}(U \times W) = \dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} W$.

כדוגמה למרחב מכפלה כדאי לחשוב על מרחבים כמו $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$.

הוכחה: נגדיר העתקה לינארית $T : U \times W \to U + W$ על ידי

$$T(u,w) = u + w$$

בבירור $\mathrm{Im}T = U + W$, כיוון שלכל $u + w \in U + W$ הוקטור $(u,w) \in U \times W$ מקיים $T(u,w) = u + w$.

נראה כעת כי החיתוך $U \cap W$ והגרעין $\ker T$ איזומורפיים: נגדיר $S : U \cap W \to \ker T$ על ידי $S(v) = (v,-v)$ ונראה חח"ע ועל:

ההעתקה היא חח"ע, כי אם $v \in \ker S$ אז $S(v) = (v,-v) = (0,0)$ ולכן בהכרח $v = 0$.

ההעתקה היא על, כי נניח $(u,w) \in \ker T$ אז $u + w = 0$ ולכן $u = -w$ ומכאן $u \in U \cap W$.

לכן $\ker T \cong U \cap W$ ובפרט יש שוויון במימדים, ולכן

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{F}} \ker T}_{\dim_{\mathbb{F}}(U \cap W)} + \underbrace{\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}T}_{\dim_{\mathbb{F}}(U+W)} = \underbrace{\dim_{\mathbb{F}} U \times W}_{\dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} W}$$

ונוסחת המימדים נובעת. ■

11.4 הרכבה של העתקות לינאריות

הגדרה 11.19 יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $T : V \to W$ ו $S : U \to V$ העתקות לינאריות. אז ההרכבה של T עם S הינה ההעתקה $T \circ S : U \to W$ המוגדרת על ידי

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))$$

טענה 11.20 הרכבת העתקות לינאריות היא העתקה לינארית מעל אותו השדה.

הוכחה: לכל $u_1, u_2 \in U$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ מתקיים

$$\begin{aligned}(T \circ S)(\alpha u_1 + \beta u_2) &= T(S(\alpha u_1 + \beta u_2)) = T(\alpha S(u_1) + \beta S(u_2)) \\ &= \alpha T(S(u_1)) + \beta T(S(u_2)) = \alpha (T \circ S)(u_1) + \beta (T \circ S)(u_2)\end{aligned}$$

■

דוגמאות:

1. יהיו $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ ו $S : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ ההעתקות הלינאריות המוגדרות על ידי
$$S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) - cx + 2dx^2, \ \ T\left(a + bx + cx^2\right) = \begin{pmatrix} b-c \\ a+2b \end{pmatrix}$$
אז $T \circ S : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ מוגדרת על ידי
$$(T \circ S)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c-2d \\ a+b-2c \end{pmatrix}$$

2. תהי $T_A : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$ הנתונה על ידי $T_A(v) = Av$ כאשר $A \in M_{k\times m}(\mathbb{F})$ ותהי $T_B : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ הנתונה על ידי $T_B(v) = Bv$ כאשר $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. אז ההרכבה $T_A \circ T_B : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k$ היא ההעתקה T_{AB}. כלומר מכפלת מטריצות הינה הרכבת העתקות לינאריות.

3. אם $T : V \to W$ איזומורפיזם, אז $T^{-1} \circ T = Id_V$ ובדומה $T \circ T^{-1} = Id_W$.

טענה 11.21 אם $T : V \to W$ ו $S : U \to V$ איזומורפיזמים אז גם ההרכבה $T \circ S : U \to W$ איזומורפיזם.

הוכחה: מכך שההעתקות הן איזומורפיזמים נובע כי יש שוויון במימדים, ולכן מספיק להראות שההרכבה היא חח"ע. נניח כי $u \in \ker T \circ S$, אז $S(u) \in \ker T$ וכיוון ש T חח"ע אז $S(u) = 0_V$, אבל S חח"ע גם ולכן $u = 0_U$, כלומר $\ker T \circ S = \{0_U\}$ ולכן ההרכבה חח"ע. ■

סימון: תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית מהמרחב לעצמו. אז בהנתן $k \in \mathbb{N}$ מסמנים $T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k \text{ times}}$, ובנוסף מגדירים $T^0 = Id_V$.

12 קואורדינטות, מטריצה מייצגת העתקה ומטריצות מעבר בסיסים

12.1 קואורדינטות

בשיעור קודם הוכחנו שמרחבים וקטורים מעל אותו שדה ומאותו מימד הם איזומורפיים, ובפרט למשל

$$M_{m\times n}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{mn}, \ \ \mathbb{F}_n[x] \cong \mathbb{F}^{n+1}$$

נציג כעת את העתקת הקואורדינטות ונראה שהיא איזומורפיזם המאפשר לנו לעבור למרחבי n־יות באופן פשוט ויעיל:

הגדרה 12.1 יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה $\mathbb{F}$, יהי $B=(v_1,...,v_n)\subset V$ בסיס סדור של V ויהי $v\in V$. **וקטור (n־ית) הקואורדינטות** של v הינה n־ית המקדמים $[v]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ עבורה $v=\lambda_1v_1+...+\lambda_nv_n$. קיום ויחידות של וקטור מקדמים נובע מכך ש B בסיס, ולכן לכל $v\in V$ קיים ויחיד צירוף לינארי מתאים.

הגדרה 12.2 יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה $\mathbb{F}$ ויהי $B=(v_1,...,v_n)\subset V$ בסיס סדור של V. העתקת הקואורדינטות ביחס לבסיס B היא ההעתקה $\chi_B:V\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת על ידי $\chi_B(v)=[v]_B$. בהקשר זה $\mathbb{F}^n$ נקרא לעיתים **מרחב הקואורדינטות**. .

טענה 12.3 העתקת הקואורדינטות היא העתקה לינארית, ומהווה איזומורפיזם.

הוכחה: נראה לינאריות: יהיו $v,u\in V$, ונניח $[u]_B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$, $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, כלומר $u=\sum\beta_iv_i$, $v=\sum\alpha_iv_i$. יהיו $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$, אז מתקיים לכן $\lambda v+\mu u=\sum(\lambda\alpha_i+\mu\beta_i)v_i$. כיוון ש B בסיס זאת ההצגה היחידה, ולכן

$$[\lambda v+\mu u]_B=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1+\mu\beta_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_n+\mu\beta_n\end{pmatrix}=\lambda[v]_B+\mu[u]_B$$

כדי להראות שההעתקה היא איזומורפיזם מספיק להראות שהיא חח"ע (משיקולי מימדים), כלומר להראות שהגרעין הוא טריוויאלי. נניח אם כן $[v]_B=0$, אז $v=0\cdot v_1+...+0\cdot v_n=0$ ואכן הגרעין כולל את וקטור האפס בלבד. ∎

דוגמה: יהי $B=(3+x,2x+1)$ בסיס סדור של $\mathbb{R}_1[x]$, ויהי $v=3x-1\in\mathbb{R}_1[x]$. כדי למצוא את וקטור הקואורדינטות $[v]_B$ עלינו למצוא $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ המקיימים

$$3x-1=\alpha_1(3+x)+\alpha_2(2x+1)$$

השוואת מקדמים תגדיר את מערכות המשוואות:

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&1&-1\\1&2&3\end{array}\right)\dashrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&2\end{array}\right)$$

ולכן $[v]_B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

דוגמה: יהי $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$, ויהי $v=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. כדי למצוא את וקטור הקואורדינטות $[v]_B$ עלינו למצוא $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ המקיימים

$$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

כלומר לפתור את מערכת המשוואות:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\1&-1&5\end{array}\right)\dashrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&4\\0&1&-1\end{array}\right)$$

ולכן $[v]_B=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

הערה: באופן כללי אם $V=\mathbb{F}^n$ אז $v=[v]_B$ אם ורק אם B הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$.

הערה: העתקת הקואורדינטות היא לינארית ולכן לכל בסיס B, לכל $\{u_1,...,u_k\}$ ולכל $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$\left[\sum\alpha_iu_i\right]_B=\sum\alpha_i\left[u_i\right]_B$$

ובפרט

$$[u]_B\in Span_{\mathbb{F}}\left\{[u_1]_B,...,[u_k]_B\right\}\Leftrightarrow u\in Span_{\mathbb{F}}\left\{u_1,...,u_k\right\}$$

ומכיוון שזה איזומורפיזם אז קבוצה בת"ל/פורשת/בסיס ב V עוברת לקבוצה בת"ל/פורשת/בסיס ב $\mathbb{F}^n$ ולהיפך.

לסיכום: העתקת הקואורדינטות מאפשרת לנו לתרגם שאלות ממרחבים כללים למרחבי n־יות בהם יש לנו כלים מפותחים לניתוח תכונות של קבוצות ווקטורים.

תרגיל: מצאו בסיס ל $Span_{\mathbb{R}}\left\{2+2x^2,-x+x^2,1+x\right\}\subset\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון: בעזרת הבסיס הסטנדרטי (הסדור) $E=\left(1,x,x^2\right)\subset\mathbb{R}_2[x]$ נעבור לעבוד ב $\mathbb{R}^3$ (יכולנו לבחור כל בסיס סדור אחר של $\mathbb{R}_2[x]$, אבל יותר נח לעבוד עם הבסיס E). מתקיים

$$\left[2+2x^2\right]_E=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\ \left[-x+x^2\right]_E=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ [1+x]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

כעת נגדיר מטריצה ששורותיה ה 3־יות הנ"ל, ונדרג אותה:

$$\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\dashrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס של $Span_{\mathbb{R}}\left\{\left[2+2x^2\right]_E,\left[-x+x^2\right]_E,[1+x]_E\right\}$ ולכן $\left\{1+x^2,x-x^2\right\}$ הבסיס הנדרש.

12.2 מטריצה מייצגת העתקה לינארית

הגדרה 12.4 תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, ויהיו $B=(b_1,...,b_n)\subset V$ ו $C=(c_1,...,c_m)\subset W$ בסיסים סדורים של V ו W. **מטריצת הייצוג של ההעתקה** T **ביחס לבסיסים** B **ו** C הינה המטריצה

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}| & & |\\ [T(b_1)]_C & \cdots & [T(b_n)]_C\\ | & & |\end{pmatrix}\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

טענה 12.5 לכל $v\in V$ מתקיים

$$\underbrace{[T]_C^B}_{\in M_{m\times n}(\mathbb{F})}\underbrace{[v]_B}_{\in\mathbb{F}^n}=\underbrace{[T(v)]_C}_{\in\mathbb{F}^m}$$

ותכונה זו מגדירה ביחידות את המטריצה המייצגת, כלומר בהנתן העתקה ושני בסיסים קיימת ויחידה מטריצה המקיימת את השוויון.

הוכחה: יהי $v\in V$, ונניח כי $v=\sum_{i=1}^n\lambda_ib_i$, כלומר $[v]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$. מתקיים

$$[T(v)]_C=\left[T\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ib_i\right)\right]_C=\left[\sum_{i=1}^n\lambda_iT(b_i)\right]_C=\sum_{i=1}^n\lambda_i[T(b_i)]_C=[T]_C^B[v]_B$$

נניח כי קיימת מטריצה M כך שלכל $v\in V$ מתקיים $M[v]_B=[T(v)]_C$. אז לכל $v\in V$

$$\left(M-[T]_C^B\right)[v]_B=[T(v)]_C-[T(v)]_C=0$$

כלומר, העתקת הקואורדינטות מראה ש V איזומורפי לתת מרחב של המאפס $\mathcal{N}\left(M-[T]_C^B\right)\subset\mathbb{F}^n$, אבל כיוון שאנחנו יודעים שהיא מעבירה את V ל $\mathbb{F}^n$ קיבלנו

$$\mathbb{F}^n\subset\mathcal{N}\left(M-[T]_C^B\right)\subset\mathbb{F}^n$$

ולכן $\mathcal{N}\left(M-[T]_C^B\right)=\mathbb{F}^n$, כלומר המאפס הוא המרחב כולו ולכן $M-[T]_C^B=0$.

הערה: ניתן היה להשתמש גם בשיקולי מימדים: מהנתון שלכל $v\in V$ מתקיים $\left(M-[T]_C^B\right)[v]_B=0$ נובע

$$n=\dim_{\mathbb{F}}V\le\dim_{\mathbb{F}}\left(\mathcal{N}\left(M-[T]_C^B\right)\right)\le\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}^n=n$$

ולכן

$$\dim_{\mathbb{F}}\left(\mathcal{N}\left(M-[T]_C^B\right)\right)=n$$

לפי נוסחת הדרגה והאפסות $\operatorname{rank}\left(M-[T]_C^B\right)=0$ כלומר $M=[T]_C^B$. ■

דוגמה: תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית הנתונה על ידי

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(a+2b)+(3a-b)x+3bx^2$$

ויהיו B,C בסיסים למרחבים:

$$B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right)\subset\mathbb{R}^2,\ \ C=\left\{1+x,1-x,1+x^2\right\}\subset\mathbb{R}_2[x]$$

נחשב את מטריצת הייצוג:

$$T(b_1)=T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3+2x+3x^2\ \Rightarrow[T(b_1)]_C=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$T(b_2)=T\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=2+6x\ \Rightarrow[T(b_2)]_C=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&4\\-1&-2\\3&0\end{pmatrix}$$

תרגיל: תהי $T:V\to V$ ונניח B בסיס של V. אז $[T]_B^B=I_n$ אם ורק אם $T=Id$ העתקת הזהות.

טענה 12.6 תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, ויהיו $B\subset V$ ו $C\subset W$ בסיסים כלשהם. אז

$$\dim_{\mathbb{F}}\ker T=\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)$$
$$\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{Im}T=\operatorname{rank}\left([T]_C^B\right)$$

הוכחה: נוכיח את הזהות הראשונה (השניה נובעת מהראשונה על ידי שימוש במשפטי המימדים דרגה־אפסות וגרעין־תמונה):

$$\begin{aligned}\ker T &= \{v \in V|\, T(v) = 0\} = \{v \in V|\, [T(v)]_C = 0\} \\ &= \left\{v \in V|\, [T]_C^B [v]_B = 0\right\} = \left\{v \in V|\, [v]_B \in \mathcal{N}\left([T]_C^B\right)\right\}\end{aligned}$$

השוויון הנ"ל מראה כי $\ker T$ איזומורפי ל $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)$ (האיזומורפיזם הוא העתקת הקואורדינטות המצומצמת רק על $\ker T$) ולכן המרחבים $\ker T$ ו $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)$ מאותו מימד. ■

מסקנה 12.7 הדרגה והאפסות של מטריצה מייצגת העתקה אינם תלויים בבחירת הבסיסים, אלא בהעתקה עצמה בלבד.

12.3 מטריצה מייצגת של הרכבת העתקות

טענה 12.8 יהיו U, V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$, עם בסיסים $B \subset U,\, C \subset V,\, D \subset W$. יהיו $T : V \to W$ ו $S : U \to V$ העתקות לינאריות, ויהי $u \in U$. מתקיים

$$[T \circ S]_D^B [u]_B = [T \circ S(u)]_D = [T]_D^C [S(u)]_C = [T]_D^C [S]_C^B [u]_B$$

ומחידות מטריצה מייצגת נקבל

$$[T \circ S]_D^B = [T]_D^C [S]_C^B$$

הערה: קיבלנו שייצוג של הרכבה שקול למכפלת המטריצות המייצגות.

מסקנה 12.9 אם $T : V \to W$ איזומורפיזם, כלומר העתקה לינארית הפיכה, ואם $B \subset V,\, C \subset W$ בסיסים, אז

$$\left[T^{-1}\right]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1}$$

הוכחה: מתקיים $\left[T^{-1}\right]_B^C [T]_C^B = \left[T^{-1} \circ T\right]_B^B = [Id_V]_B^B = I_n$. ■

דוגמה: יהיו $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ ו $S : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ המוגדרות על ידי

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c + 2d \\ b - d \\ 2a - b - c \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & x - y \\ y + 2x & y - x \end{pmatrix}$$

ויהיו B, C, D הבסיסים סטנדרטיים למרחבים $\mathbb{R}^2, M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3$ בהתאמה.

נחשב את המטריצה $[S]_C^B$:

$$S(b_1)=S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix},\ S(b_2)=S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[S]_C^B=\begin{pmatrix}|&|\\ [S(b_1)]_C&[S(b_2)]_C\\ |&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&-1\\2&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצה $[T]_D^C$:

$$T(c_1)=T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ T(c_2)=T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T(c_3)=T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ T(c_4)=T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_D^C=\begin{pmatrix}|&&|\\ [T(c_1)]_D&\cdots&[T(c_4)]_D\\ |&&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&-1\\2&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

נחשב כעת את $[T\circ S]_D^B$:

$$T\circ S(b_1)=T\circ S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$T\circ S(b_2)=T\circ S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c+2d\\b-d\\2a-b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T\circ S]_D^B=\begin{pmatrix} | & | \\ [T\circ S(b_1)]_D & [T\circ S(b_2)]_D \\ | & | \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

נבדוק שהכל מסתדר:

$$[T]_D^C\,[S]_C^B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=[T\circ S]_D^B$$

12.4 מקרה פרטי – מטריצת מעבר בסיסים

הגדרה 12.10 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $B=(b_1,...,b_n)$ ו $C=(c_1,...,c_n)$ בסיסים של V. **מטריצת המעבר מבסיס** B **לבסיס** C הינה $[Id]_C^B$ מטריצת הייצוג של העתקת הזהות $Id:V\to V$ (כאן $Id=Id_V$) ביחס לבסיסים B ו C.

הערה: מטריצת מעבר הבסיסים הינה המטריצה אותה יש לכפול בוקטור קואורדינטות לפי בסיס אחד כדי לקבל וקטור קואורדינטות לפי בסיס שני, כלומר

$$[Id]_C^B\,[v]_B=[Id\,(v)]_C=[v]_C$$

ומתקיים

$$[Id]_C^B=\begin{pmatrix} | & & | \\ [b_1]_C & \cdots & [b_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$$

כפי שראינו במקרה הכללי יותר, בהנתן זוג בסיסים סדורים, מטריצת המעבר נקבעת ביחידות. בנוסף, כיוון שהעתקת הקואורדינטות (לפי בסיס C) מעבירה בסיס (את B) לבסיס (של $\mathbb{F}^n$), מטריצות מעבר הן מטריצות הפיכות, ומתקיים:

טענה 12.11 יהי V מרחב וקטורי ויהיו B,C,D בסיסים של V, אז

$$[Id]_D^B=[Id]_D^C\,[Id]_C^B$$

ובפרט $[Id]_B^C=\left([Id]_C^B\right)^{-1}$.

הוכחה: נובע מטענה שראינו לגבי הרכבות, ומכך ש $Id \circ Id = Id$. ■

דוגמה: נמצא מטריצת מעבר עבור הבסיסים הבאים של $\mathbb{R}^2$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \ \ C = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

נחשב $[b_1]_C\,, [b_2]_C$ ונציב כעמודות מטריצה:

$$[b_1]_C = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \ [b_2]_C = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[Id]_C^B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

למשל עבור הוקטור $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, עבורו מתקיים $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, נכפול בו את מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ואכן $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_C$.

הערה: במקרים רבים נוכל לחשב את מטריצת המעבר באופן מהיר יותר, על ידי שימוש בבסיס סטנדרטי שמעליו קל יותר לחשב את וקטורי הקואורדינטות, ועל ידי התכונות שראינו עבור מטריצת מעבר, ובפרט הזהות

$$[Id]_C^B = [Id]_C^E \, [Id]_E^B = \left([Id]_E^C \right)^{-1} [Id]_E^B$$

בדוגמה שלנו: הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא $E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. מתקיים

$$[Id]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ [Id]_E^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[Id]_C^B = \left([Id]_E^C \right)^{-1} [Id]_E^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

כלומר במקום חישובים רבים ומסובכים של וקטורי קואורדינטות, צריך רק להפוך מטריצה ולכפול אותה באחרת.

הערה: בהנתן מטריצה הפיכה ניתן למצוא זוג בסיסים עבורם המטריצה מהווה מטריצת מעבר בסיסים. אין יחידות כלל, אך בהנתן מטריצת מעבר, לכל בסיס במקור קיים בסיס בטווח כך שהמטריצה היא המייצגת את המעבר, ולהיפך.

12.5 יחסים בין מטריצות ייצוג לאותה העתקה ביחס לבסיסים שונים

תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, ויהיו $B_1,B_2\subset V$ ו $C_1,C_2\subset W$ בסיסים. נרצה לעבור מהמטריצה המייצגת $[T]_{C_1}^{B_1}$ למטריצה המייצגת $[T]_{C_2}^{B_2}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & [T]_{C_1}^{B_1} & & \\ & V_{B_1} & \rightarrow & W_{C_1} & \\ [Id_V]_{B_1}^{B_2} & \uparrow & & \downarrow & [Id_W]_{C_2}^{C_1} \\ & V_{B_2} & \rightarrow & W_{C_2} & \\ & & [T]_{C_2}^{B_2} & & \end{array}$$

לכל וקטור $v\in V$ מתקיים

$$[T]_{C_2}^{B_2}[v]_{B_2}=[Id_W]_{C_2}^{C_1}[T]_{C_1}^{B_1}[Id_V]_{B_1}^{B_2}[v]_{B_2}$$

ומיחידות המטריצה המייצגת

$$[T]_{C_2}^{B_2}=[Id_W]_{C_2}^{C_1}[T]_{C_1}^{B_1}[Id_V]_{B_1}^{B_2}$$

כלומר החלפת בסיסים בהעתקות לינאריות שקול לחישוב מטריצות מעבר וכפל מהצדדים הנכונים.

דוגמה חשובה: אם $T:V\to V$ ו $B,C\subset V$ שני בסיסים, אז

$$[T]_B^B=\underbrace{[Id]_B^C}_{P^{-1}}[T]_C^C\underbrace{[Id]_C^B}_{P}=P^{-1}[T]_C^C P$$

המטריצה $[T]_B^B$ נקראת גם **מטריצת הייצוג של** T **ביחס לבסיס** B (כלומר אותו הבסיס במקור ובטווח).

12.6 מרחב ההעתקות הלינאריות

הגדרה 12.12 יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $T,S:V\to W$ שתי העתקות לינאריות. יהי $\lambda\in\mathbb{F}$, נגדיר שתי העתקות:

א. $T+S:V\to W$ המוגדרת על ידי $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$.

ב. $\lambda T:V\to W$ המוגדרת על ידי $(\lambda T)(v)=\lambda(T(v))$.

הגדרה 12.13 קבוצת ההעתקות הלינאריות מהמרחב V למרחב W מהווה מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ ביחס לפעול החיבור והכפל בסקלר שתיארנו לעיל. נסמן

$$\mathcal{L}\left(V,W\right)=\left\{T:V\rightarrow W|\,T\,\text{is a linear transformation}\right\}$$

ולמשל וקטור האפס של המרחב (כלומר הניטרלי לחיבור) הינו העתקת האפס $0_{V,W}$.

טענה 12.14 יהיו $B\subset V$ ו $C\subset W$ בסיסים, אז מתקיים

$$\begin{aligned}&\left[T+S\right]_{C}^{B}=\left[T\right]_{C}^{B}+\left[S\right]_{C}^{B}\\&\left[\lambda T\right]_{C}^{B}=\lambda\left[T\right]_{C}^{B}\end{aligned}$$

טענה 12.15 יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, יהיו $B\subset V$ ו $C\subset W$ בסיסים, ונניח כי $\dim V=n$, $\dim W=m$. ההעתקה $\varphi_{B,C}:\mathcal{L}\left(V,W\right)\rightarrow M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ המוגדרת על ידי $\varphi_{B,C}\left(T\right)=\left[T\right]_{C}^{B}$ הינה איזומורפיזם.

הוכחה: ראשית נשים לב שההעתקה הזאת מוגדרת היטב (כלומר חד ערכית), כיוון שבהנתן בסיסים מתאימים B,C, לכל העתקה $T\in\mathcal{L}\left(V,W\right)$ ישנה מטריצה מייצגת אחת ויחידה $\varphi_{B,C}\left(T\right)=\left[T\right]_{C}^{B}$. נראה שההעתקה היא לינארית, חח"ע ועל, ולכן איזומורפיזם:

<u>לינאריות:</u> הלינאריות של $\varphi_{B,C}$ נובעת מהטענה הקודמת, כי בעצם הראינו

$$\begin{aligned}&\varphi_{B,C}\left(T+S\right)=\left[T+S\right]_{C}^{B}=\left[T\right]_{C}^{B}+\left[S\right]_{C}^{B}=\varphi_{B,C}\left(T\right)+\varphi_{B,C}\left(S\right)\\&\varphi_{B,C}\left(\lambda T\right)=\left[\lambda T\right]_{C}^{B}=\lambda\left[T\right]_{C}^{B}=\lambda\varphi_{B,C}\left(T\right)\end{aligned}$$

<u>חח"ע:</u> כדי להראות ש $\varphi_{B,C}$ חח"ע נראה שהגרעין טריוויאלי, כלומר $\ker\varphi_{B,C}=\left\{0_{V,W}\right\}$. ואכן, אם $\varphi_{B,C}\left(T\right)=\left[T\right]_{C}^{B}=0$ מטריצת האפס, אז לכל וקטור ב $v\in V$ מתקיים $\left[T\right]_{C}^{B}\left[v\right]_{B}=0\left[v\right]_{B}=0$, אבל $\left[T\right]_{C}^{B}\left[v\right]_{B}=\left[T\left(v\right)\right]_{C}$ ולכן קיבלנו שלכל $v\in V$ מתקיים $\left[T\left(v\right)\right]_{C}=0$. העתקת הקואורדינטות היא איזומורפיזם ולכן לכל $v\in V$ בעצם $T\left(v\right)=0$ כלומר $T=0_{V,W}$ כנדרש.

<u>על:</u> נראה כעת כי $\varphi_{B,C}$ העתקה על. תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, אז נרצה למצוא $T:V\rightarrow W$ עבורה $\varphi_{B,C}\left(T\right)=\left[T\right]_{C}^{B}=A$, כלומר T המקיימת $\left[T\left(v\right)\right]_{C}=A\left[v\right]_{B}$ לכל $v\in V$. נסמן לשם כך את העתקות הקואורדינטות המתאימות על ידי $\chi_{B}:V\rightarrow\mathbb{F}^{n}$ ו $\chi_{C}:W\rightarrow\mathbb{F}^{m}$, כלומר $\chi_{B}\left(v\right)=\left[v\right]_{B}$ ו $\chi_{C}\left(w\right)=\left[w\right]_{C}$. המטריצה המייצגת $\left[T\right]_{C}^{B}$ היא המטריצה היחידה $M\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת את התנאי הבא: לכל $v\in V$ מתקיים

$$\left[T\left(v\right)\right]_{C}=M\left[v\right]_{B}$$

כלומר אם $T_M : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ היא ההעתקה המוגדרת על ידי $T_M(v) = Mv$ אז

$$\chi_C \circ T(v) = T_M \circ \chi_B(v)$$

ובלשון העתקות

$$\chi_C \circ T = T_M \circ \chi_B$$

לכן, כדי להגדיר העתקה שהמטריצה המייצגת אותה ביחס לבסיסים B, C היא המטריצה הנתונה A, ניקח את T להיות ההרכבה

$$T = (\chi_C)^{-1} \circ T_A \circ \chi_B$$

והעתקה זאת אכן מקיימת $A = [T]_C^B = \varphi_{B,C}(T)$ ולכן $\varphi_{B,C}$ היא אכן על. ■

מסקנה 12.16 $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{L}(V, W) = n \cdot m = \dim_{\mathbb{F}} V \cdot \dim_{\mathbb{F}} W$.

הערה: שימו לב שאנחנו קובעים בסיסים B, C ומציגים את כל ההעתקות ביחס אליהן בלבד. באופן כללי יתכן מצב שבו אותה מטריצה מייצגת שתי העתקות שונות, פשוט ביחס לבחירת בסיסים שונה.

13 לכסון מטריצות והעתקות לינאריות

בפרק זה נעסוק במטריצות ריבועיות מעל הממשיים או המרוכבים בלבד, כלומר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. בהמשך מטריצות אלו ישמשו לייצוג העתקות ממרחב לעצמו $T : V \to V$.

13.1 דמיון מטריצות

הגדרה 13.1 מטריצות ריבועיות $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ נקראות **דומות** אם קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה עבורה $A = P^{-1}BP$.

דוגמה: תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית, נניח $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ ויהיו $B, C \subset V$ שני בסיסים. ראינו בשיעור קודם שמתקיים

$$[T]_B^B = \underbrace{[Id]_B^C}_{P^{-1}} [T]_C^C \underbrace{[Id]_C^B}_{P} = P^{-1} [T]_C^C P$$

כלומר אם $[T]_B^B$ ו $[T]_C^C$ הן מטריצות ייצוג של אותה העתקה (מהמרחב לעצמו) ביחס לשני בסיסים כלשהם, אז הן דומות, והמטריצה P שמראה זאת היא מטריצת מעבר הבסיסים המתאימה.

טענה 13.2 דמיון מטריצות הינו יחס שקילות.

הוכחה: נראה ששלוש התכונות (רפלקסיביות, סימטריה, וטרנזיטיביות) מתקיימות ביחס לדמיון:

א. רפלקסיביות: $A = I_n^{-1} A I_n$ לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$, ולכן A דומה לעצמה.

ב. סימטריה: נניח $B = P^{-1}AP$, אז $A = \left(P^{-1}\right)^{-1} B \left(P^{-1}\right)$.

ג. טרנזיטיביות: אם $B = P^{-1}AP$ ו $C = Q^{-1}BQ$ אז $C = Q^{-1}\left(P^{-1}AP\right)Q = (PQ)^{-1} A (PQ)$. ■

טענה 13.3 אם A ו B דומות אז:

א. $\det A = \det B$.

ב. $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$ (כאשר $\mathrm{tr}A = \sum a_{ii}$ סכום איברי האלכסון, נראה גם העקבה של A).

ג. $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

הוכחה: נרשום $B = P^{-1}AP$ כאשר P מטריצה הפיכה.

א. מתקיים

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1} \det A \det P = \frac{1}{\det P} \det A \det P = \det A$$

ב. מנוסחת כפל המטריצות מתקיים $\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$ (תרגיל. שימו לב שאמנם $\mathrm{tr}ABC = \mathrm{tr}CAB$ אבל $\mathrm{tr}ABC \neq \mathrm{tr}ACB$)

$$\mathrm{tr}B = \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\left(\left(P^{-1}\right)(AP)\right) = \mathrm{tr}\left((AP)\left(P^{-1}\right)\right) = \mathrm{tr}\left(APP^{-1}\right) = \mathrm{tr}A$$

ג. נזכור כי אם C הפיכה אז $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}CA$ (כיוון ש $A \sim CA$), וכי $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^T$. לכן

$$\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{rank}\,(AP) = \mathrm{rank}\,(AP)^T = \mathrm{rank}\left(P^TA^T\right) = \mathrm{rank}A^T = \mathrm{rank}A$$

■

13.2 ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ומטריצה לכסינה

הגדרה 13.4 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח כי עבור הסקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ קיים וקטור שונה מאפס $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ המקיים $Av = \lambda v$. אז λ נקרא **ערך עצמי** (**ע"ע**, Eigenvalue) של A, ו v נקרא **וקטור עצמי** (או **ו"ע**, Eigenvector) של A המתאים לערך העצמי λ.

דוגמה: עבור $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ הוקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי $\lambda = 1$, והוקטור $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי $\lambda = -2$.

הגדרה 13.5 מטריצה $D \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת אלכסונית אם $(D)_{i,j} = 0$ לכל $i \neq j$, כלומר אם כל האיברים שאינם על האלכסון הראשי הם אפס. מסמנים גם

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

הגדרה 13.6 נאמר שהמטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ **ניתנת ללכסון**, או **לכסינה** מעל $\mathbb{F}$, אם A דומה למטריצה אלכסונית D, כלומר אם קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש $D = P^{-1}AP$. P כזאת נקראת לפעמים **המטריצה המלכסנת**, ו D נקראת לפעמים **צורה אלכסונית של** A.

הערה: אנחנו מעוניינים ללכסן מטריצות כיוון שמצורה אלכסונית של A ניתן להסיק בקלות תכונות של המטריצה או של העתקה אותה היא מייצגת. בנוסף לכסון מאפשר להפעיל על מטריצה מניפולציות בקלות, למשל אם $A = PDP^{-1}$ ו $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$ אז

$$A^k = \left(PDP^{-1}\right) \cdots \left(PDP^{-1}\right) = PD^kP^{-1} = P\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k\right)P^{-1}$$

וזה יכול להיות שימושי, כמו למשל כשבתרגול 4 הראתם שסדרת פיבונצ'י F_n מקיימת

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז אם היינו יודעים ללכסן את המטריצה הזאת החישוב היה הופך פשוט מאד, גם עבור ערכי n גדולים.

טענה 13.7 $A \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אם ורק אם קיים בסיס $\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{F}^n$ של וקטורים עצמיים של A.

הוכחה: נניח כי A לכסינה, כלומר $AP = PD$ כאשר P הפיכה ו $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. נסמן את עמודות P על ידי $v_1, ..., v_n$ וזהו בסיס ב $\mathbb{F}^n$ כי P הפיכה. נשווה עמודות בשוויון $AP = PD$ ונקבל כי $Av_j = \lambda_j v_j$, כלומר איברי D הם ערכים עצמיים של A ועמודות P הן בסיס של וקטורים עצמיים של A.

נניח כי $\{v_1, ..., v_n\} \subset \mathbb{F}^n$ בסיס של ו"ע של A ונניח $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{F}$ הערכים העצמיים המתאימים. נגדיר מטריצה הפיכה P שעמודותיה הן איברי הבסיס. לפי הגדרת וקטור עצמי נקבל $AP = PD$ כאשר $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ...\lambda_n)$. ■

הערה: בהמשך נראה שלא כל המטריצות לכסינות, ונמצא אפיונים של לכסינות.

טענה 13.8 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ערכים עצמיים **שונים** של A. יהיו $v_1, ..., v_k \in \mathbb{F}^n$ וקטורים עצמיים של A המתאימים לערכים העצמיים $\lambda_1, ..., \lambda_k$ בהתאמה, אז $\{v_1, ..., v_k\}$ קבוצה בת"ל.

הוכחה: באינדוקציה על מספר האיברים בקבוצה:

בסיס האינדוקציה: אם בקבוצה איבר יחיד $\{v_1\}$ אז היא בת"ל כי $v_1 \neq 0$ מהיותו וקטור עצמי.

הנחת האינדוקציה: נניח כי $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ קבוצת וקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}$

צעד האינדוקציה: יהי v_k וקטור עצמי המתאים לערך עצמי λ_k, כאשר λ_k שונה מכל הערכים $\lambda_1, ..., \lambda_{k-1}$. נוכיח כי אז $v_k \notin Span_{\mathbb{F}}\{v_1, ..., v_{k-1}\}$, ולכן על פי טענה שהוכחנו $\{v_1, ..., v_k\}$ קבוצה בת"ל. נניח בשלילה $v_k \in Span_{\mathbb{F}}\{v_1, ..., v_{k-1}\}$. הנחנו שהקבוצה $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$בת"ל ולכן מהווה בסיס לתת המרחב שהיא פורשת, ובפרט ישנה הצגה יחידה של v_k כצירוף לינארי של איברי הקבוצה

$$v_k = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{k-1} v_{k-1}$$

לא כל המקדמים α_j הם אפס כי $v_k \neq 0$ מהיותו וקטור עצמי. נכפול את שני האגפים ב A מצד שמאל ונקבל

$$\lambda_k v_k = A v_k = A\left(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{k-1} v_{k-1}\right)$$

$$\alpha_1 A v_1 + ... + \alpha_{k-1} A v_{k-1} = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

נניח כי $\lambda_k = 0$, אז בהכרח שאר הערכים העצמיים שונים מאפס, וקיבלנו הצגה לא טריוויאלית של וקטור האפס כצ"ל של איברי הקבוצה, בסתירה להיות בת"ל. נניח כעת כי $\lambda_k \neq 0$, אז נוכל לחלק בשני האגפים ונקבל

$$v_k = \alpha_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 + ... + \alpha_{k-1} \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1}$$

וקיבלנו הצגה שונה של v_k כצ"ל של איברי הקבוצה הבת"ל, בסתירה. מכאן $v_k \notin Span_{\mathbb{F}}\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ כנדרש. ■

מסקנה 13.9 יש לכל היותר $n = \dim \mathbb{F}^n$ ערכים עצמיים שונים. אם יש בדיוק n ערכים עצמיים שונים אז הוקטורים העצמיים מהווים בסיס ל $\mathbb{F}^n$ ולכן המטריצה לכסינה.

13.3 הפולינום האפייני ומרחבים עצמיים – מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

מההגדרות לערכים ווקטורים עצמיים נקבל את הטענה הבאה:

טענה 13.10 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. התנאים הבאים שקולים:

א. λ ערך עצמי של A.

ב. קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ המקיים $Av = \lambda v$, כלומר $(\lambda I_n - A) v = 0$.

ג. המאפס של $\lambda I_n - A$ אינו טריוויאלי, ובפרט $\dim \mathcal{N}(\lambda I_n - A) \neq 0$.

ד. $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

מסקנה 13.11 כדי למצוא ערכים עצמיים נחפש λ כך ש $\det(\lambda I_n - A) = 0$, וכדי למצוא וקטורים עצמיים מתאימים נחקור את $\mathcal{N}(\lambda I_n - A)$.

הערה: מהטענה הנ"ל ברור כי 0 הוא ע"ע של A אם ורק אם A לא הפיכה. שימו לב שאין קשר בין הפיכות ללכסינות, ישנן לכסינות לא הפיכות וישנן הפיכות לא לכסינות.

הגדרה 13.12 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, אז $p_A(x) = \det(xI_n - A)$ נקרא הפולינום האפייני (Characteristic polynomial).

הפולינום האפייני הוא פולינום **מתוקן** ממעלה n, כלומר שהמקדם של x^n הוא תמיד 1. בנוסף, שורשי הפולינום, כלומר ערכי α עבור $p_A(\alpha) = 0$, הם הערכים העצמיים של A ולהיפך, כל ע"ע מאפס את הפולינום האפייני. שימו לב שבאופן כללי בהנתן פולינום כלשהו קשה ובדרך כלל בלתי אפשרי למצוא את כל שורשיו כפונקציה של המקדמים שלו.

תרגיל: אם A, B דומות אז $p_A(x) = p_B(x)$.

הגדרה 13.13 יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$. אז **המרחב העצמי (מ"ע, Eigenspace)** המתאים לע"ע λ הוא תת המרחב

$$V_\lambda = \mathcal{N}(\lambda I_n - A) = \{0\} \cup \{\text{eigenvectors corresponding to } \lambda\} \subset \mathbb{F}^n$$

דוגמה: ננסה ללכסן את $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

ראשית נחשב פולינום אפייני:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xI_2 - A) = \det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x & -1 \\ -2 & x+1 \end{pmatrix} = x(x+1) - 2 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \end{aligned}$$

ולכן נסיק שהע"ע של A הם $1, -2$. נשים לב שקיבלנו שני ערכים עצמיים שונים ולכן A לכסינה. נחשב מרחבים עצמיים:

$$\begin{aligned} V_{\lambda=1} &= \mathcal{N}(1 \cdot I_2 - A) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Canonical} \\ \text{form}}}{=} \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ V_{\lambda=-2} &= \mathcal{N}(-2 \cdot I_2 - A) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Canonical} \\ \text{form}}}{=} \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

מצאנו אם כן בסיס של $\mathbb{R}^2$ המורכב מו"ע של A, נרכיב מאיברי הבסיס את המטריצה המלכסנת P ומהע"ע צורה אלכסונית D (סדר עמודות P צריך להתאים לסדר הע"ע עבורם הם ו"ע):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ואכן, כיוון ש $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{3}$ קיבלנו

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = D$$

הערה: יכולנו לבחור את סדר הע"ע אחרת ואז סדר עמודות P היה מתהפך. יכולנו גם לקחת בסיס אחר של וקטורים עצמיים, וזה היא משנה את P ואת P^{-1} אבל לא את $P^{-1}AP$ (כי החלפת הבסיס היה מסתכם בכפל במטריצה הפיכה).

דוגמה: ננסה ללכסן את $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

ראשית נחשב פולנום אפייני:

$$p_B(x) = \det(xI_3 - B) = \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ -1 & x-1 & -5 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x-2)\left((x-1)^2 - 1\right) = (x-2)\left(x^2 - 2x\right) = x(x-2)^2$$

נעזרנו בכך שדטרמיננטה של מטריצת בלוקים משולשית שווה למכפלת דטרמיננטות הבלוקים. מצאנו שני ע"ע - $0, 2$. אם היו שלושה היינו מסיקים ש B לכסינה, אך העובדה שיש רק שניים עדיין לא קובעת ש B אינה לכסינה. נחשב מרחבים עצמיים:

$$V_{\lambda=0} = \mathcal{N}(0 \cdot I_3 - B) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Canonical} \\ \text{form}}}{=} \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda=2} = \mathcal{N}(2 \cdot I_3 - B) = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Canonical} \\ \text{form}}}{=} \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו שאין אפשרות למצוא בסיס ל $\mathbb{R}^3$ של וקטורים עצמיים, אלא קבוצה בת"ל אם שני איברים בלבד, ולכן B לא לכסינה.

דוגמה: ננסה ללכסן את $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

א. נחשוב על C כעל מטריצה ממשית, וננסה ללכסן מעל $\mathbb{R}$. נחשב פולינום אפייני:

$$p_C(x) = \det(xI_2 - C) = \det\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

אבל לפולינום זה אין שורשים ממשיים, ולכן אין ע"ע ממשיים, אין וקטורים עצמיים המתאימים להם ובודאי אין בסיס של ו"ע, ולכן C אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

ב. נחשוב על C כעל מטריצה מרוכבת, וננסה ללכסן מעל $\mathbb{C}$. נחשב פולינום אפייני:

$$p_C\left(x\right)=x^2+1=\left(x-i\right)\left(x+i\right)$$

וקיבלנו שני ערכים עצמיים שונים, $i,-i$ ולכן C לכסינה מעל $\mathbb{C}$. נחשב מרחבים עצמיים:

$$V_{\lambda=i}=\mathcal{N}\left(i\cdot I_2-C\right)=\mathcal{N}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Canonical}\\\text{form}}}{=}\mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=Span_{\mathbb{C}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda=-i}=\mathcal{N}\left(-i\cdot I_2-C\right)=\mathcal{N}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\underset{\substack{\text{Canonical}\\\text{form}}}{=}\mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=Span_{\mathbb{C}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן עבור $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ ו $D=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ נקבל $P^{-1}CP=D$.

הערה: אם מטריצה היא לכסינה מעל $\mathbb{R}$ אז היא לכסינה גם מעל $\mathbb{C}$, אבל כפי שראינו ההיפך לא נכון. ישנן מטריצות שאינן לכסינות לא מעל $\mathbb{R}$ ולא מעל $\mathbb{C}$. בנוסף אם עבור $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ול $p_A\left(x\right)$ יש n שורשים שונים אז A לכסינה ואם ל $p_A\left(x\right)$ אין שורשים כלל אז A לא לכסינה.

13.4 ריבוי אלגברי, ריבוי גאומטרי ומשפט הלכסון

מהדוגמאות לעיל ראינו שתנאי שקול לכך שמטריצה $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ היא לכסינה, הוא שסכום מימדי המרחבים העצמיים שלה שווה ל n, או במילים אחרות קיימים $\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{F}$ עבורם $\mathbb{F}^n=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_k}$. נמצא תנאים המבטיחים תכונה זו.

הגדרה 13.14 תהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי λ ע"ע של A. **הריבוי האלגברי** $\mu_A\left(\lambda\right)$ של λ הינו החזקה בה מופיע הגורם $\left(x-\lambda\right)$ בפולינום האפייני של A. **הריבוי הגאומטרי** $\gamma_A\left(\lambda\right)$ של λ הינו המימד של המרחב העצמי המתאים, כלומר $\gamma_A\left(\lambda\right)=\dim_{\mathbb{F}}V_\lambda$.

הערה: נניח שניתן לרשום $p_A\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^kf\left(x\right)$ כאשר f פולינום ממעלה $n-k$. אם $f\left(\lambda\right)\neq0$ אז $\mu_A\left(\lambda\right)=k$, ואם $f\left(\lambda\right)=0$ אז $\mu_A\left(\lambda\right)>k$.

טענה 13.15 לכל ערך עצמי λ מתקיים $1\leq\gamma_A\left(\lambda\right)\leq\mu_A\left(\lambda\right)\leq n$.

הוכחה: הריבוי הגאומטרי הוא לפחות 1 כיוון ש λ ע"ע, ולכן מההגדרה V_λ אינו תת מרחב טריוויאלי. הריבוי האלגברי הוא לכל היותר n כיוון שהפולינום האפייני הוא פולינום ממעלה n. נראה את אי השוויון האמצעי. נניח $k=\gamma_A\left(\lambda\right)$ ויהי

$\{v_1,...,v_k\} \subset V_\lambda$ בסיס למרחב העצמי. נשלימו לבסיס $\{v_1,...,v_k,u_1,...,u_{n-k}\}$ של $\mathbb{F}^n$. נגדיר מטריצה הפיכה

$$Q = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k & u_1 & \cdots & u_{n-k} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$$

שעמודותיה איברי הבסיס. מתקיים

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda I_k & * \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

מטריצת בלוקים, שהבלוק משמאל למעלה הוא בלוק אלכסוני בגודל $k \times k$ עם λ על האלכסון. כיוון ש A ומטריצת הבלוקים הזאת דומות, לשתיהן אותו פולינום אפייני, כלומר

$$p_A(x) = p_{Q^{-1}AQ}(x) = (x-\lambda)^k q(x)$$

כאשר $q(x) = p_X(x)$ פולינום, ולכן $\mu_A(\lambda) \geq k = \gamma_A(\lambda)$ כנדרש. ■

משפט 13.16 (המשפט היסודי של האלגברה) כל פולינום מתפרק למכפלת גורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$. כלומר אם p פולינום ממעל n עם מקדמים מרוכבים או ממשיים, אז

$$p(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

כאשר $\alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{C}$ לאו דווקא שונים.

הערה: ראינו שזה לא נכון מעל $\mathbb{R}$ (למשל x^2+1). הוכחת המשפט לא במסגרת הקורס (ולא בכלים של הקורס, צריך חדו"א)

משפט 13.17 (משפט הלכסון) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$, אז A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$) אם ורק אם

א. הפולינום האפייני $p_A(x)$ מתפרק למכפלת גורמים לינאריים מעל $\mathbb{F}$.

ב. לכל ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ מתקיים $\gamma_A(\lambda) = \mu_A(\lambda)$, כלומר הריבוי האלגברי שווה לגאומטרי.

הערה: אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ אז מהמשפט היסודי של האלברה סעיף א' תמיד מתקיים. אם יש n ע"ע שונים אז לכל אחד מהם ריבוי אלגברי בדיוק 1, ולכן מטענה קודמת $1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \mu_A(\lambda) = 1$ יש שוויון בריבויים, ולכן לפי המשפט A אכן לכסינה.
הוכחה: ($\Rightarrow$) נרצה להרכיב בסיס של $\mathbb{F}^n$ שאיבריו ו"ע של A. מסעיף א' נובע כי

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k}$$

כאשר $\lambda_1,...,\lambda_k \in \mathbb{F}$ שונים, ו $r_1,...,r_k \in \mathbb{N}$ המקיימים $n = r_1 + ... + r_k$, ומסעיף ב' נובע ש לכל $1 \leq j \leq k$

$$\dim_{\mathbb{F}} V_{\lambda_j} = \gamma_A(\lambda_j) = \mu_A(\lambda_j) = r_j$$

כלומר נוכל לבחור בסיס $B_j = \left\{v_{j_1}, ..., v_{j_{r_j}}\right\} \subset V_{\lambda_j}$ לכל מרחב עצמי. הקבוצה $B = B_1 \cup ... \cup B_k$ מורכבת מו"ע של A ויש בה בדיוק n איברים, ולכן כדי הלראות שהיא הבסיס הנדרש מספיק להראות שהיא בת"ל: נניח כי

$$\underbrace{\alpha_{11} v_{11} + ... + \alpha_{1r_1} v_{1r_1}}_{=u_1 \in V_{\lambda_1}} + ... + \underbrace{\alpha_{k1} v_{k1} + ... + \alpha_{kr_k} v_{kr_k}}_{=u_k \in V_{\lambda_k}} = 0$$

כלומר $u_1 + ... + u_k = 0$. זהו צירוף לינארי של k וקטורים, אחד מכל מרחב עצמי. לכן בהכרח $u_1 = ... = u_k = 0$, שכן כל איבר במרחב עצמי שאינו וקטור האפס הוא וקטור עצמי, ולא יתכן שצירוף לינארי של ו"ע המתאימים לע"ע שונים יהיה שווה לאפס, כי הוכחנו שקבוצת ו"ע כזאת היא בת"ל. לכן

$$0 = u_j = \alpha_{j1} v_{j1} + ... + \alpha_{jr_j} v_{jr_j}$$

וכיוון ש B_j בסיס כל המקדמים מתאפסים. סך הכל קיבלנו ש B קבוצה בת"ל , ולכן A לכסינה.

$(\Leftarrow)$ נניח A לכסינה, ונניח בשלילה שא' לא מתקיים, כלומר

$$p_A(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_k)^{r_k} q(x)$$

כך שלכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $q(\alpha) \neq 0$ ו q פולינום ממעלה חיובית. לכן

$$\gamma_A(\lambda_1) + ... + \gamma_A(\lambda_k) \leq \mu_A(\lambda_1) + ... + \mu_A(\lambda_k) = r_1 + ... + r_k < n$$

ולכן אי אפשר להרכיב קבוצה בת"ל בת n איברים המורכבת מוקטורים עצמיים.

נניח בשלילה שב' לא מתקיים, אז קיים ע"ע λ_j כך ש $\gamma_A(\lambda_j) < r_j$ ולכן

$$\gamma_A(\lambda_1) + ... + \gamma_A(\lambda_k) < r_1 + ... + r_k \leq n$$

ושוב, אי אפשר להרכיב קבוצה בת"ל בת n איברים המורכבת מוקטורים עצמיים. ■

13.5 משפטים נוספים – משפט קיילי המילטון ומשפט ז'ורדן

משפט 13.18 (קיילי המילטון) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $p_A(x)$ הפולינום האפייני שלה, אז $p_A(A) = 0$.

דוגמה: ראינו שעבור $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ מתקיים $p_A(x) = x^2 + x - 2$. נחשב

$$A^2 + A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמה: ראינו שעבור $R_{\frac{\pi}{2}}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=C$ מתקיים $p_C(x)=x^2+1$. נחשב

$$C^2+I_2=\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{R^2_{\frac{\pi}{2}}=R_\pi}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט 13.19 (ז'ורדן) כל מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ שהפולינום האפייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים (קורה תמיד אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) דומה למטריצה משולשית עליונה שעל האלכסון שלה מופיעים הערכים העצמיים (קיימת צורה קנונית כזאת, והיא נקראת צורת ז'ורדן).

13.6 לכסון העתקות לינאריות

הגדרה 13.20 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ ממימד n. העתקה לינארית $T:V\to V$ נקראת **העתקה לכסינה** אם קיים בסיס $B=(b_1,...,b_n)\subset V$ כך ש $[T]_B^B$ אלכסונית.

בסיס כזה נקרא בסיס מלכסן, ומתקיים

$$[T(v)]_B=\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{[T]_B^B}[v]_B$$

מההגדרה העמודה ה j של $[T]_B^B$ היא $[T(b_j)]_B$, ולכן במקרה כזה $T(b_j)=\lambda_j b_j$.

הגדרה 13.21 תהי $T:V\to V$ ונניח כי עבור הסקלר $\lambda\in\mathbb{F}$ קיים וקטור שונה מאפס $0\neq v\in V$ המקיים $T(v)=\lambda v$. אז λ נקרא **ערך עצמי** (או **ע"ע**) של T, ו v נקרא **וקטור עצמי** (או **ו"ע**) של T המתאים לערך העצמי λ.

מסקנה 13.22 T לכסינה אם ורק אם קיים ל V בסיס של וקטורים עצמיים של T.

מסקנה 13.23 ראינו שאם $B,C\subset V$ בסיסים אז $[T]_B^B=P^{-1}[T]_C^C P$ כאשר $P=[Id]_C^B$, ולכן אם $[T]_C^C$ מטריצה לכסינה אז T העתקה לכסינה ולהיפך, אם T העתקה לכסינה אז לכל בסיס $C\subset V$ המטריצה $[T]_C^C$ היא לכסינה.

הערה: כדי למצוא בסיס מלכסן ל T נבחר בסיס כלשהו $C\subset V$, נלכסן את המטריצה המייצגת $[T]_C^C$ ונמצא D אלכסונית ו P מלכסנת המקיימות $D=P^{-1}[T]_C^C P$. את הבסיס B נוכל לחלץ מהביטוי $P=[Id]_C^B$, ובמקרה זה יתקיים $D=[T]_B^B$.

הגדרה 13.24 תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

א. יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ערך עצמי T. אז **המרחב העצמי** של הע"ע λהוא תת המרחב

$$V_\lambda=\ker\left(\lambda Id-T\right)=\{0\}\cup\{\text{eigenvectors corresponding to }\lambda\}\subset V$$

ב. נניח $B\subset V$ בסיס כלשהו, אז נגדיר $\det T=\det\left(\left[T\right]_B^B\right)$. כיוון שלכל בחירת בסיס אחרת היינו מקבלים מטריצה דומה, ולמטריצות דומות דטרמיננטות שוות, $\det T$ אינו תלוי בבסיס של V.

ג. הפולינום האפייני של T הינו $p_T\left(x\right)=\det\left(xId-T\right)$.

הערה: כדי לחשב פולינום אפייני צריך לבחור בסיס כלשהו $B\subset V$ ולהעזר בכך ש

$$\left[\alpha S+\beta T\right]_B^B=\alpha\left[S\right]_B^B+\beta\left[T\right]_B^B$$

ולכן

$$p_T\left(x\right)=\det\left(xId-T\right)=\det\left(\left[xId-T\right]_B^B\right)=\det\left(x\left[Id\right]_B^B-\left[T\right]_B^B\right)=\det\left(xI_n-\left[T\right]_B^B\right)$$

מסקנה 13.25 T לכסינה אם ורק אם קיימים $\lambda_1,...,\lambda_k$ עבורם $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_k}$.

הערה: אם $\{v_1,...,v_k\}\subset V$ ו"ע של ערכים עצמיים שונים אז הקבוצה בת"ל.

דוגמה: נניח $T_A:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ הנתונה על ידי $T\left(v\right)=Av$ ומטריצה $A\in M_2\left(\mathbb{F}\right)$. אז עבור הבסיס הסטנדרטי E מתקיים $A=\left[T\right]_E^E$ ואם נלכסן את A, אז עמודות P שהן עצמן מהוות בסיס של וקטורים עצמיים של A, יהוו את הבסיס המלכסן של ההעתקה T_A, שכן $P=\left[Id\right]_E^B$.

דוגמה: תהי $T:\mathbb{R}_1\left[x\right]\to\mathbb{R}_1\left[x\right]$ העתקה לינארית הנתונה על ידי $T\left(a+bx\right)=\left(2a+b\right)+\left(a+2b\right)x$.

נסמן $E=\left(1,x\right)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_1\left[x\right]$ ונחשב את $\left[T\right]_E^E$:

$$T\left(1\right)=2+x\Rightarrow\left[T\left(1\right)\right]_E=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ T\left(x\right)=1+2x\Rightarrow\left[T\left(x\right)\right]_E=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

ולכן $\left[T\right]_E^E=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. נלכסן את המטריצה המייצגת:

הפולינום האפייני הוא $\det\left([T]_E^E\right) = x^2 - 4x + 3$ ולכן הע"ע הם $3, 1$. נחשב מרחבים עצמיים:

$$V_{\lambda=3} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{\lambda=1} = \mathcal{N}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

כלומר $P = [Id]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ולכן

$$[b_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 = 1 + x,\ \ [b_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 = 1 - x$$

כלומר הבסיס המלכסן הוא $B = \{1 + x, 1 - x\}$, והוא מורכב מו"ע של ההעתקה T. ואכן

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} [T(b_1)]_B & [T(b_2)]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [3 + 3x]_B & [1 - x]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13.7 סיכום דומה ושונה בלכסון מטריצות והעתקות

קל להתבלבל בין המושגים השונים, דווקא בגלל הדמיון ביניהם. להלן טבלה שעשויה לעזור בהפרדה בין לכסון מטריצות ולכסון העתקות:

מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$	העתקה לינארית $T : V \to V$
$\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A אם קיים ו"ע $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ עבורו $Av = \lambda v$	$\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של T אם קיים ו"ע $0 \neq v \in V$ עבורו $T(v) = \lambda v$
מ"ע המתאים ל λ הוא $V_\lambda = \mathcal{N}(\lambda I_n - A) \subset \mathbb{F}^n$	מ"ע המתאים ל λ הוא $V_\lambda = \ker(\lambda Id_V - T) \subset V$
הפולינום האפייני $p_A(x) = \det(xI_n - A)$	הפולינום האפייני $p_T(x) = \det(xId_V - T)$ $p_T(x) = p_{[T]_C^C}(x)$ לכל בחירת בסיס C
λ ע"ע $\Longleftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{F}} V_\lambda \geq 1$	λ ע"ע $\Longleftrightarrow p_T(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{F}} V_\lambda \geq 1$
A לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם קיים בסיס $B \subset \mathbb{F}^n$ המורכב מו"ע של A קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ עבורה $P^{-1}AP = D$ אלכסונית עמודות P הן וקטורי הבסיס B $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינארים, ריבוי גאומטרי = אלגברי $\mathbb{F}^n = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$	T לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם קיים בסיס $B \subset V$ המורכב מו"ע של T $[T]_C^C$ לכסינה לכל בסיס $C \subset V$ $[T]_B^B = [Id]_B^C [T]_C^C [Id]_C^B$ אלכסונית $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינארים, ריבוי גאומטרי = אלגברי $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$

14 מרחבי מכפלה פנימית

מכפלה פנימית בין וקטורים היא פונקציה שמתאימה לזוג וקטורים מספר, ובעזרתה אנחנו יכולים לפתח גאומטריה במרחב וקטורי, למשל להגדיר מרחק או זווית בין שני וקטורים.

14.1 הגדרות ודוגמאות

הגדרה 14.1 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. הפונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ המתאימה לכל זוג וקטורים $u,v\in V$ מספר מרוכב $\langle u,v\rangle\in\mathbb{C}$ נקראת **מכפלה פנימית** מעל $\mathbb{C}$ אם מתקיים:

א. **חיובית:** לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\geq 0$ ממשי, ו $\langle v,v\rangle=0$ אם ורק אם $v=0$.

ב. **סימטרית מוצמדת:** לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.

ג. **לינארית ביחס למשתנה שני:** כלומר $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$ $\langle u,\lambda v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$ לכל $\lambda\in\mathbb{C}$.

הערה: מתקיים

$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle &= \overline{\langle w,u+v\rangle}=\overline{\langle w,u\rangle+\langle w,v\rangle}\\ &=\overline{\langle w,u\rangle}+\overline{\langle w,v\rangle}=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

כלומר החיבוריות מתקיימת גם במשתנה ראשון, אבל

$$\langle\lambda u,v\rangle=\overline{\langle v,\lambda u\rangle}=\overline{\lambda\langle v,u\rangle}=\overline{\lambda}\overline{\langle v,u\rangle}=\overline{\lambda}\langle u,v\rangle$$

כלומר אין הומוגניות במשתנה ראשון, הקבוע יוצא החוצה עם צמוד.

הערה: אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ נגדיר מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ באופן דומה. כיוון שלכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\overline{a}=a$, הסימטריה המוצמדת במקרה זה היא פשוט סימטריה, ולינאריות היא בשני המשתנים.

דוגמאות:

1. המכפלה הפנימית **הסטנדרטית** ב $\mathbb{C}^n$: יהיו $x,y\in\mathbb{C}^n$, נניח $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ אז

$$\langle x,y\rangle_{\mathrm{ST}}=\overline{x_1}y_1+...+\overline{x_n}y_n=\sum_{i=1}^n\overline{x_i}y_i$$

בהנתן $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ נסמן $\overline{A}^T\in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ המטריצה המתקבלת מלקיחת צמוד על כל איברי A^T. אז

$$\langle x,y\rangle_{\mathrm{ST}}=\overline{x}^Ty$$

ב $\mathbb{R}^n$ המכפלה הסטנדרטית מוגדרת באופן זהה, כלומר

$$\langle x,y\rangle = x^T y$$

למשל:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathrm{ST}} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) = -4$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathrm{ST}} = \bar{i}\cdot(1-i) + \overline{(1+i)}\cdot(-2) = -i\,(1-i) + (1-i)\,(-2) = -3+i$$

נראה שמכפלה הסטנדרטית היא אכן מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$:

א. חיוביות: לכל $x \in \mathbb{C}^n$ מתקיים

$$\langle x,x\rangle_{\mathrm{ST}} = \overline{x_1}x_1 + ... + \overline{x_n}x_n = |x_1|^2 + ... + |x_n|^2 \geq 0$$

ושיוויון יתקיים אם ורק אם $x_1 = ... = x_n = 0$ כלומר $x = 0$ וקטור האפס.

ב. סימטריה מוצמדת: לכל $x,y \in \mathbb{C}^n$ מתקיים

$$\langle x,y\rangle_{\mathrm{ST}} = \overline{x_1}y_1 + ... + \overline{x_n}y_n = \overline{x_1\overline{y_1} + ... + x_n\overline{y_n}} = \overline{\langle y,x\rangle_{\mathrm{ST}}}$$

ג. לינאריות לפי משתנה שני:

$$\begin{aligned}\langle x,y+z\rangle_{\mathrm{ST}} &= \overline{x_1}\,(y_1+z_1) + ... + \overline{x_n}\,(y_n+z_n) \\ &= \overline{x_1}y_1 + ... + \overline{x_n}y_n + \overline{x_1}z_1 + ... + \overline{x_n}z_n = \langle x,y\rangle_{\mathrm{ST}} + \langle x,z\rangle_{\mathrm{ST}}\end{aligned}$$

ובדומה לגבי כפל בסקלר.

2. יהי $V = \mathbb{R}_n[x]$ (או מרחב פונקציות אחר), אז הפונקציה

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_a^b p(x)\,q(x)\,dx$$

מגדירה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$:

א. חיובית:

$$\langle p(x), p(x)\rangle = \int_a^b (p(x))^2\,dx \geq 0$$

כי $(p(x))^2 \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$, והאינטגרל מתאפס רק אם זה פולינום האפס.

ב. סימטריה ברורה מההגדרה.

ג. לינאריות נובעת מלינאריות האינטגרל המסוים.

3. עבור $V=\mathbb{R}^2$ הפונקציה

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = x^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y$$

מגדירה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$.

הערה: לכל מכפלה פנימית על מרחב n־יות יש מטריצה שמתאימה לה, אבל לא כל מטריצה מגדירה מכפלה פנימית. על המטריצה לקיים תכונות מסוימות כדי שתכונות המכפלה הפנימית יתקיימו, למשל במקרה הממשי ברור שעלינו לדרוש שהמטריצה היא סימטרית, ודרישה נוספת תבטיח גם את החיוביות.

4. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{F}} V = n$, ויהי $B\subset V$ בסיס, אז

$$\langle u,v\rangle = \langle [u]_B\,, [v]_B\rangle_{\mathrm{ST}}$$

מגדירה מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, נובע ממה שהוכחנו עבור המכפלה הסטנדרטית ומאיזומורפיזם הקואורדינטות.

הערה: אם $V=\mathbb{F}^n$ ו $B\subset V$ בסיס, ו $E\subset V$ הבסיס הסטנדרטי אז

$$\langle u,v\rangle = \langle [u]_B\,, [v]_B\rangle_{\mathrm{ST}} = \left\langle [Id]_B^E\, u, [Id]_B^E\, v\right\rangle_{\mathrm{ST}} = \overline{[Id]_B^E\, u}^T\; [Id]_B^E\, v = \overline{u}^T \left(\overline{[Id]_B^E}^T\; [Id]_B^E\right) v$$

ומקבלים מכפלה פנימית המוגדרת בעזרת מטריצה, כמו בודגמה לעיל.

הגדרה 14.2 אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, ו $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית המוגדרת על V, אז $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ נקרא **מרחב מכפלה פנימית**. האיברים והפעולות בו הם איברי V והפעולות המוגדרות עליו, והגאומטריה (כפי שנגדיר בהמשך) נקבעת על פי $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

הערה: כפי שראינו ניתן להגדיר מכפלות פנימיות שונות על מרחב נתון.

מסקנה 14.3 מהדוגמה האחרונה נקבל שכל מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ ניתן להצגה כמרחב מכפלה פנימית (למשל על ידי בחירת המכפלה הפנימית להיות הסטנדרטית ביחס לקואורדינטות לפי בסיס נתון של המרחב).

14.2 נורמה של וקטור, אי שוויון קושי־שוורץ, אי שוויון המשולש וזווית בין וקטורים

הגדרה 14.4 יהי $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ $\mathbb{F}=$. **הנורמה** של וקטור $v\in V$ מוגדרת להיות

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

ומתכונות המכפלה הפנימית מתקיים:

א. $\|v\|\geq 0$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $v=0$.

ב. $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$לכל $\lambda\in\mathbb{F}$.

הערה: הנורמה היא הכללה של מושג האורך המוכר לנו, למשל במקרה של $\left(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{ST}}\right)$ נקבל את האורך המוכר לנו

$$\|v\|_{\text{ST}} = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$$

למשל ב $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\text{ST}}\right)$ מתקיים

$$\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\|_{\text{ST}} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\text{ST}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

אבל ב $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ כאשר $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מוגדרת על ידי $\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2$ מתקיים

$$\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\| = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{3^2 - 3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 2\cdot 4^2} = \sqrt{17} \neq 5$$

כלומר מכפלות פנימיות שונות מגדירות אורכים שונים.

משפט 14.5 (אי שוויון קושי־שוורץ) יהי $\left(V, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אז לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$$

הוכחה: המשפט מתקיים באופן טריוויאלי אם $u = v = 0$ כי

$$\langle 0, 0\rangle = \langle 0, 0 + 0\rangle = \langle 0, 0\rangle + \langle 0, 0\rangle$$

ולכן מהעברת אגף נקבל $0 = \langle 0, 0\rangle$. סך הכל

$$|\langle 0, 0\rangle| = 0 = \|0\| \cdot \|0\|$$

ואי השוויון מתקבל. בנוסף, אם $\langle u, v\rangle = 0$ אז אגף שמאל מתאפס ולכן נקבל את אי השוויון גם במקרה הזה. נניח אחרת, כלומר שאחד הוקטורים שונה מאפס (נניח $v \neq 0$) וש $\langle u, v\rangle \neq 0$, ונסמן $\lambda = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}$. מתקיים

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle = \langle u - \lambda v, u\rangle + \langle u - \lambda v, -\lambda v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle - \overline{\lambda}\,\langle v, u\rangle - \lambda\,\langle u, v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 - \overline{\lambda}\,\langle v, u\rangle - \lambda\,\langle u, v\rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\|v\|^2 \end{aligned}$$

נציב $\lambda = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}$ ונקבל

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}\langle u, v\rangle + \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\|v\|^2 = \|u\|^2 - \frac{\langle v, u\rangle\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

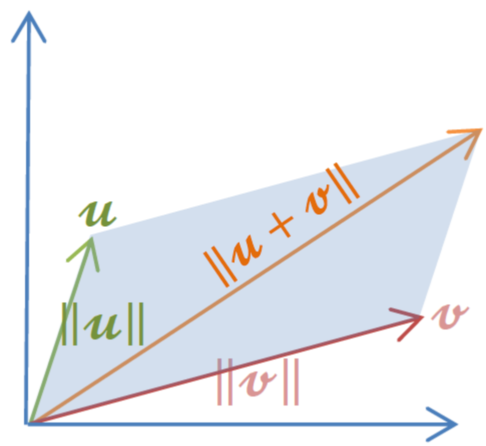
נזכור כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $\bar{z}z = |z|^2$. נעביר אגפים ונקבל

$$|\langle u, v\rangle|^2 = \langle v, u\rangle \langle u, v\rangle \leq \|v\|^2 \|u\|^2$$

ולכן $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$ כנדרש. ∎

משפט 14.6 (אי שוויון המשולש) יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אז לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



הוכחה: מתקיים

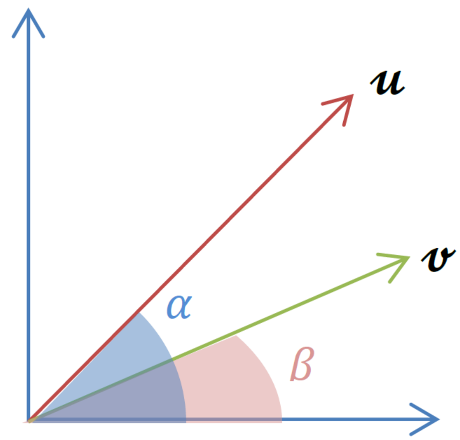
$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle = \|u\|^2 + \langle v, u\rangle + \langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \langle v, u\rangle + \overline{\langle v, u\rangle} + \|v\|^2\end{aligned}$$

לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}z$, וכן $\mathrm{Re}z \leq |z|$ (תרגיל), ולכן, לפי קושי־שוורץ

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle v, u\rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\,|\langle v, u\rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\,(\|u\|\,\|v\|) + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$

ולכן $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ כנדרש. ∎

הערה: המכפלה הפנימית מאפשרת לנו להגדיר לא רק אורך של וקטור, אלא גם זווית בין שני וקטורים. נניח ב $\mathbb{R}^2$ נוכל לרשום שני וקטורים כפונקציות של האורכים והזוויות שלהם, כלומר:



אז אם נעבוד אם המכפלה הסטנדרטית (ובהתאם עם הנורמה הנגזרת ממנה, היא האורך) נקבל

$$u = (\|u\|_{\mathrm{ST}} \cos\alpha, \|u\|_{\mathrm{ST}} \sin\alpha)$$
$$v = (\|v\|_{\mathrm{ST}} \cos\beta, \|v\|_{\mathrm{ST}} \sin\beta)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{\mathrm{ST}} &= \|u\|_{\mathrm{ST}} \|v\|_{\mathrm{ST}} \cos\alpha\cos\beta + \|u\|_{\mathrm{ST}} \|v\|_{\mathrm{ST}} \sin\alpha\sin\beta \\ &= \|u\|_{\mathrm{ST}} \|v\|_{\mathrm{ST}} \cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

כלומר הזווית בין הוקטורים $\gamma = \alpha - \beta$ מקיימת

$$\cos\gamma = \frac{\langle u, v\rangle_{\mathrm{ST}}}{\|u\|_{\mathrm{ST}} \|v\|_{\mathrm{ST}}}$$

למשל במקרה הזה, כיוון ש $-1 \le \cos\gamma \le 1$ מקבלים את אי שוויון קושי שוורץ. באותו אופן, בהנתן מרחב מכפלה פנימית $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ושני וקטורים $u, v \in V$, נוכל להגדיר את הזווית ביניהם α להיות

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}$$

14.3 אורתוגונליות

הגדרה 14.7 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $x, y \in V$. נאמר ש x ו־ y **אורתוגונלים** (מאונכים) אם $\langle x, y\rangle = 0$.

הערה: ב $\mathbb{R}^n$ אורתוגונליות ביחס למכפלה הסטנדרטית זהה להגדרה הגאומטרית של וקטורים מאונכים. כדי לראות שזה מתקיים, ניזכר שתחת המכפלה הסטנדרטית אם הזווית בין x ל y היא α אז

$$\|x\| \, \|y\| \cos\alpha = \langle x, y\rangle_{\mathrm{ST}}$$

אם x,y אינם וקטור האפס אז $\|x\|,\|y\|\neq 0$ ולכן

$$\langle x,y\rangle_{\mathrm{ST}}=0\Leftrightarrow \|x\|\,\|y\|\cos\alpha=0\Leftrightarrow \cos\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=\pi/2+\pi k$$

לכן אם x,y אורתוגונלים אז הזווית ביניהם היא $\pi/2$ או $3\pi/2$.

דוגמאות:

1. ב $\left(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ST}}\right)$ הוקטורים $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ אורתוגונלים

$$\left\langle\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathrm{ST}}=4\cdot(-1)+2\cdot 2=0$$

2. לעומת זאת ב $\left(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ עם המכפלה $\langle x,y\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2$ הוקטורים הנ"ל אינם אורתוגונלים:

$$\left\langle\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle=4\cdot(-1)-4\cdot 2-2\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot 2=-2$$

הערה: אנחנו רואים שוקטורים שמאונכים ביחס למכפלה אחת הם לאו דווקא מאונכים ביחס למכפלה אחרת.

3. ב $\left(\mathbb{C}^3,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ST}}\right)$ הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}i\\2+i\\1\end{pmatrix}$ אורתוגונלים

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\2+i\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathrm{ST}}=\bar{1}\cdot i+\bar{0}\cdot(2+i)+\bar{i}\cdot 1=i+0-i=0$$

4. ב $\left(\mathbb{R}_3[x],\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ עם המכפלה $\langle p,q\rangle=\int_{-1}^{1}p(x)\,q(x)\,dx$ הפולינומים x^2 ו- $x+x^3$ אורתוגונלים

$$\left\langle x^2,x+x^3\right\rangle=\int_{-1}^{1}x^2\left(x+x^3\right)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1}=0$$

הערה: ביחס למכפלה הפנימית הזאת כל פולינום זוגי מאונך לכל פולינום אי זוגי.

טענה 14.8 (משפט פיתגורס) יהי $\left(V,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $x,y\in V$ אורתוגונלים. אז

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

הוכחה: מתכונות המכפלה הפנימית מתקיים

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

■

הגדרה 14.9 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל שדה $\mathbb{F}$. קבוצה $\{x_1,\dots,x_k\} \subset V$ נקראת **אורתוגונלית**, אם כל זוג וקטורים בקבוצה הוא אורתוגונלי. כלומר, לכל $i \neq j$ מתקיים $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.

טענה 14.10 תהי $\{x_1,\dots,x_k\} \subset V$ קבוצה כלשהי ויהי $v \in V$. אז v אורתוגונלי לכל וקטור ב $Span_{\mathbb{F}}\{x_1,\dots,x_k\}$ אם ורק אם $\langle v, x_1\rangle = \cdots = \langle v, x_k\rangle = 0$.

הוכחה: $\Leftarrow$: מיידי מכיוון ש $\{x_1,\dots,x_k\} \subset Span_{\mathbb{F}}\{x_1,\dots,x_k\}$.

$\Rightarrow$: יהי $u \in Span_{\mathbb{F}}\{x_1,\dots,x_k\}$, אז $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$. מתכונות המכפלה הפנימית

$$\langle v,u\rangle = \langle v, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle = \alpha_1\underbrace{\langle v,x_1\rangle}_{=0} + \cdots + \alpha_k\underbrace{\langle v,x_k\rangle}_{=0} = 0$$

■

הגדרה 14.11 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל שדה $\mathbb{F}$. קבוצה $\{x_1,\dots,x_k\} \subseteq V$ נקראת **אורתונורמלית**, אם היא קבוצה אורתוגונלית ובנוסף לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $\|x_i\| = 1$.

דוגמאות:

1. ב $\left(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ST}}\right)$ הבסיס הסטנדרטי $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ מהווה קבוצה אורתונורמלית.
2. ב $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ST}}\right)$ הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה אורתוגונלית אבל לא אורתונורמלית.

הערה: כפי שראינו, $\langle u, 0\rangle = 0$ לכל $u \in V$, כלומר קטור האפס מאונך לכל וקטור במרחב. לכן יתכן ש 0 שייך לקבוצה אורתוגונלית, אבל זה בלתי אפשרי עבור קבוצה אורתונורמלית כי $1 \neq 0 = \|0\|$. לכל קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס ניתן להתאים קבוצה אורתונורמלית על ידי **נירמול**

$$\{x_1,\dots,x_k\} \mapsto \left\{\frac{1}{\|x_1\|}x_1, \dots, \frac{1}{\|x_k\|}x_k\right\}$$

דוגמה: ב $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{ST}}\right)$ הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

טענה 14.12 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ אורתונורמלית. אז הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

הוכחה: יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

נראה ש $\alpha_1 = 0$. נכפול את הביטוי ב x_1:

$$\langle x_1, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle = \langle x_1, 0\rangle$$

מצד אחד $\langle x_1, 0\rangle = 0$. מצד שני, מלינאריות לפי אבר שני

$$\langle x_1, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle = \alpha_1 \langle x_1, x_1\rangle + \alpha_2 \langle x_1, x_2\rangle + \cdots + \alpha_k \langle x_1, x_k\rangle$$

מכיוון שהקבוצה אורתונורמלית $\langle x_1, x_1\rangle = 1$ ולכל $i \geq 2$ מתקיים $\langle x_1, x_i\rangle = 0$ לכן

$$0 = \langle x_1, 0\rangle = \langle x_1, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle = \alpha_1$$

באותו אופן ניתן להראות ש $\alpha_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq k$. ■

הערה: הוכחה דומה תראה שכל קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את וקטור האפס היא בלתי תלויה לינארית.

הגדרה 14.13 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל שדה $\mathbb{F}$. קבוצה $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$ נקראת **בסיס אורתוגונלי** (בהתאמה **בסיס אורתונורמלי**) אם היא מהווה בסיס של V ובנוסף הקבוצה היא אורתוגונלית (**אורתונורמלית**).

ייצוג על פי בסיס אורתוגונלי: יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ בסיס אורתוגונלי של V. לכל $u \in V$ קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש

$$u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$$

כמו בהוכחה של הטענה הקודמת, אם נכפיל ב x_i עבור $1 \leq i \leq n$ נקבל

$$\langle x_i, u\rangle = \langle x_i, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k\rangle = \alpha_i \langle x_i, x_i\rangle = \alpha_i \|x_i\|^2$$

מכיוון ש $x_i \neq 0$, מתקיים $\|x_i\| \neq 0$ וקיבלנו

$$\alpha_i = \frac{\langle x_i, u\rangle}{\|x_i\|^2}$$

אם הבסיס B אורתונורמלי אז $\|x_i\| = 1$ ולכן $\alpha_i = \langle x_i, u \rangle$. אם נתייחס ל B כבסיס סדור, במקרה האורתונורמלי נקבל

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle x_1, u \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, u \rangle \end{pmatrix}$$

14.4 הטלה אורתוגונלית

הגדרה 14.14 יהי $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ מעל $\mathbb{F}$ ויהי $U \subset V$ תת מרחב. יהי $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ בסיס אורתונורמלי של U (נראה בהמשך שבכל מרחב מכפלה פנימית קיים כזה בסיס). **ההטלה** על U היא ההעתקה הלינארית $P_U : V \to V$ המוגדרת על פי

$$P_U(x) = \langle b_1, x \rangle b_1 + \cdots + \langle b_k, x \rangle b_k$$

עבור וקטור $x \in V$, **ההיטל** של x על U מוגדר להיות $P_U(x)$, ומתקיים $P_U(x) \in U$ לכל $x \in V$.

הערה: לכל $x \in U$ מתקיים $P_U(x) = x$ ולכן $P_U^2 = P_U \circ P_U = P_U$.

טענה 14.15 תחת אותם סימונים, לכל $x \in V$ ולכל $y \in U$ מתקיים $\langle x - P_U(x), y \rangle = 0$.

הוכחה: מטענה קודמת מספיק להראות ש $\langle b_i, x - P_U(x) \rangle = 0$ לכל $1 \le i \le k$. מתקיים

$$\begin{aligned} \langle b_i, x - P_U(x) \rangle &= \langle b_i, x - (\langle b_1, x \rangle b_1 + \cdots + \langle b_k, x \rangle b_k) \rangle \\ &= \langle b_i, x \rangle - \langle b_1, x \rangle \langle b_i, b_1 \rangle - \cdots - \langle b_k, x \rangle \langle b_i, b_k \rangle = \langle b_i, x \rangle - \langle b_i, x \rangle \underbrace{\langle b_i, b_i \rangle}_{=1} = 0 \end{aligned}$$

■

מסקנה 14.16 לכל $x \in V$ מתקיים $\langle P_U(x), x - P_U(x) \rangle = 0$.

דוגמה: ב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית נסמן $U = Span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ויהי $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ אז

$$P_U(x) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, x \right\rangle_{\text{ST}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \right\rangle_{\text{ST}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ובנוסף

$$\langle x-P_U(x),P_U(x)\rangle_{\mathrm{ST}}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathrm{ST}}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathrm{ST}}=1+0-1=0$$

משפט 14.17 (הקירוב הטוב ביותר) יהי $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית. יהי $U\subset V$ תת מרחב וקטורי ויהי $x\in V$ אז

$$\min_{y\in U}\|x-y\|=\|x-P_U(x)\|$$

כלומר ההיטל של x הוא הקטור הקרוב ביותר ל x ב U.

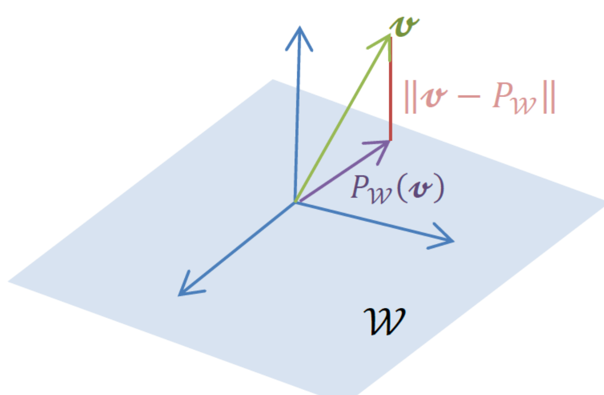
הוכחה: יהי $y\in U$ אז

$$\|x-y\|^2=\|x-P_U(x)+P_U(x)-y\|^2$$

מכיוון ש $P_U(x)-y\in U$ הוא אורתוגונלי ל $x-P_U(x)$ ולכן ממשפט פיתגורס

$$\|x-P_U(x)+P_U(x)-y\|^2=\|x-P_U(x)\|^2+\underbrace{\|P_U(x)-y\|^2}_{\geq 0}\geq\|x-P_U(x)\|^2$$

$\blacksquare$



הערה: מכיוון ש $\|P_U(x)-y\|^2=0$ אם ורק אם $y=P_U(x)$, ההיטל של x הוא הוקטור **היחיד** ב U שנותן את המינימום. זה נותן הגדרה שקולה להעתקת ההטלה.

מסקנה 14.18 העתקת ההטלה P_U אינה תלויה בבחירת בסיס של המרחב U.

דוגמה: נראה למשל שעבור $\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הסטנדרטית, ההטלה של הוקטור $x=\begin{pmatrix}3\\1+i\\2i\end{pmatrix}$ על תת המרחב $U=Span_{\mathbb{C}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא תלוי בבחירת בסיס אורתונרמלי ל U. ואכן, יהיו $B=\left\{\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ו $C=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיסים אורתונרמליים של U, אז

$$P_U(x)=\langle b_1,x\rangle_{\mathrm{ST}}b_1+\langle b_2,x\rangle_{\mathrm{ST}}b_2=-3i\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}+(-1-i)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1+i\\0\end{pmatrix}$$

ובדומה

$$P_U(x)=\langle c_1,x\rangle_{\mathrm{ST}}c_1+\langle c_2,x\rangle_{\mathrm{ST}}c_2=\left(\frac{3-i(1+i)}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{3+i(1+i)}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1+i\\0\end{pmatrix}$$

דוגמאות נוספות:

1. ב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)\,dx$ נמצא הפולינום הקרוב ביותר ל x^2 מהצורה $ax+b$.
כלומר, הפולינום הקרוב ביותר ל x^2 בתת המרחב $U=Span_{\mathbb{R}}\{1,x\}$. זה בסיס אורתוגונלי, לכן צריך לנרמל את הוקטורים כדי לקבל בסיס אורתונורמלי $\left\{1/\sqrt{2},\sqrt{3/2}x\right\}$. נחשב את ההיטל

$$P_U(x^2)=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}},x^2\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}+\left\langle\sqrt{\frac{3}{2}}x,x^2\right\rangle\sqrt{\frac{3}{2}}x=\frac{1}{2}\langle 1,x^2\rangle+\frac{3}{2}\langle x,x^2\rangle x$$

נחשב כל גורם בנפרד

$$\langle 1,x^2\rangle=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{3}\left(1^3-(-1)^3\right)=\frac{2}{3}$$

$$\langle x,x^2\rangle=\int_{-1}^{1}x\cdot x^2dx=0$$

כי זה אינטגרל בקטע סימטרי על פולינום אי זוגי. וקיבלנו

$$P_U(x^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0x=\frac{1}{3}$$

2. תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי $b\in\mathbb{F}^{m}$ כך שאין פתרון למערכת $Ax=b$, כלומר לכל $v\in\mathbb{F}^{n}$ מתקיים $Av\neq b$. נרצה למצוא $v\in\mathbb{F}^{n}$ כך ש Av ו־ b יהיו קרובים ככל האפשר. למערכת $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in\mathcal{C}\left(A\right)\subset\mathbb{F}^{m}$, לכן כדי למצוא $v\in\mathbb{F}^{n}$ כזה נפתור את $Ax=\widetilde{b}$ עבור $\widetilde{b}=P_{\mathcal{C}(A)}\left(b\right)$, ההטלה של b על תת המרחב $\mathcal{C}\left(A\right)$.

14.5 תהליך גרם־שמידט

משפט 14.19 יהי $\left(V,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle \right)$ מרחב מכפלה פנימית. תהי $\left\{ x_{1},\ldots,x_{k}\right\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית, אז קיימת קבוצה אורתונורמלית $\left\{ y_{1},\ldots,y_{k}\right\}$ כך שלכל $1\leq m\leq k$ מתקיים

$$Span_{\mathbb{F}}\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\} =Span_{\mathbb{F}}\left\{ y_{1},\ldots,y_{m}\right\}$$

הוכחה: נגדיר את $y_{1},\ldots y_{k}$ באינדוקציה, בתהליך שנקרא **תהליך גרם-שמידט**. נגדיר

$$y_{1}=\frac{x_{1}}{\left\Vert x_{1}\right\Vert }$$

מתקיים $Span_{\mathbb{F}}\left\{ x_{1}\right\} =Span_{\mathbb{F}}\left\{ y_{1}\right\}$ בנוסף זה וקטור יחיד המקיים $\left\langle y_{1},y_{1}\right\rangle =1$ ולכן הקבוצה אורתונורמלית.

נניח שהגדרנו את $y_{1},\ldots y_{m-1}$ ונגדיר את y_{m}. נסמן

$$\widetilde{y}_{m}=x_{m}-P_{Span_{\mathbb{F}}\left\{ y_{1},\cdots,y_{m-1}\right\} }\left(x_{m}\right)=x_{m}-\left(\left\langle y_{1},x_{m}\right\rangle y_{1}+\cdots+\left\langle y_{m-1},x_{m}\right\rangle y_{m-1}\right)$$

מכיוון שהקבוצה בלתי תלויה, $\widetilde{y}_{m}\neq0$ ולכן ניתן להגדיר

$$y_{m}=\frac{\widetilde{y}_{m}}{\left\Vert \widetilde{y}_{m}\right\Vert }$$

נראה שהתכונות הדרושות מתקיימות:

1. מתכונות ההיטל הוקטור y_{m} אורתוגונלי ל $y_{1},\ldots,y_{m-1}$.
2. נראה$Span_{\mathbb{F}}\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\} =Span_{\mathbb{F}}\left\{ y_{1},\ldots,y_{m}\right\}$: מכיוון ש $y_{1},\ldots,y_{m}$ התקבלו על ידי צירופים לינארים של $x_{1},\ldots,x_{m}$ מתקיים

$$Span_{\mathbb{F}}\left\{ y_{1},\ldots,y_{m}\right\} \subset Span_{\mathbb{F}}\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\}$$

מכיוון שהקבוצה $\left\{ y_{1},\ldots,y_{m}\right\}$ אורתונורמלית היא בלתי תלויה לינארית ולכן

$$\dim_{\mathbb{F}}\left(Span_{\mathbb{F}}\left\{ y_{1},\ldots,y_{m}\right\} \right)=m=\dim_{\mathbb{F}}\left(Span_{\mathbb{F}}\left\{ x_{1},\ldots,x_{m}\right\} \right)$$

ולכן המרחבים שווים. ■

הערה: ניתן לעשות את התהליך הזה על כל קבוצה $\{x_1, \dots, x_k\}$. במקרה והקבוצה תלויה לינארית, חלק מהוקטורים שנקבל יהיו וקטור האפס. כל וקטור שהוא צריוף לינארי של הוקטורים לפניו יהיה וקטור האפס (ואז כמובן אי אפשר לנרמל). אם התחלנו מבסיס אורתונורמלי, תהליך גרם־שמידט לא ישנה אותו.

מסקנה 14.20 לכל מרחב מכפלה פנימית קיים בסיס אורתונורמלי – פשוט נפעיל את תהליך גרם־שמידט על בסיס כלשהו.

דוגמה: נמצא בסיס אורתונורמלי למרחב $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה הפנימית $\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
נתחיל עם לקחת בסיס בסיס כלשהו למרחב $\{1, x, x^2\}$ ונשתמש בתהליך גרם־שמידט:
הוקטור הראשון בבסיס הוא הפולינום הקבוע $p = 1$:

$$y_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

הוקטור השני הוא הפולינום $p = x$:

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_2 &= x - \langle y_1, x\rangle y_1 = x - \frac{1}{3}(-1+0+1) = x\\ y_2 &= \frac{\widetilde{y}_2}{\|\widetilde{y}_2\|} = \frac{x}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{x}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ונמשיך כאשר הוקטור השלישי בבסיס הינו $p = x^2$:

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_3 &= x^2 - \left\langle y_1, x^2\right\rangle y_1 - \left\langle y_2, x^2\right\rangle y_2 = x^2 - \frac{1}{3}(1+0+1) - \frac{1}{2}(-1+0+1)x = x^2 - \frac{2}{3}\\ y_3 &= \frac{\widetilde{y}_3}{\|\widetilde{y}_3\|} = \frac{x^2 - 2/3}{\sqrt{\left((-1)^2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0^2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1^2 - \frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{x^2 - 2/3}{\sqrt{1/9 + 4/9 + 1/9}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - 2/3\right)\end{aligned}$$

וקיבלנו את הבסיס האורתונורמלי

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - 2/3\right)\right\}$$

משפט 14.21 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ממימד n. תהי $\{x_1, \dots, x_k\}$ קבוצה אורתונורמלית, אז קיימים $y_{k+1}, \dots, y_n$ כך ש $\{x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n\}$ בסיס אורתונורמלי.

הוכחה: נשלים את הקבוצה לבסיס על ידי $\{x_1, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_n\}$ ונפעיל את תהליך גרם שמידט לפי הסדר. מכיוון ש $\{x_1, \dots, x_k\}$ קבוצה אורתונורמלית היא לא תשתנה. הוקטורים $z_{k+1}, \dots, z_n$ יעברו ל $y_{k+1}, \dots, y_n$ המבוקשים. ■

דוגמה: נשלים את $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ לבסיס אורתונורמלי ב $\mathbb{R}^3$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית. יש שתי אפשרויות:

1. אם רואים מראש איזה וקטור הוא לא צירוף לינארי של אלה ניתן להוסיף אותו ולהפעיל תהליך גרם–שמידט.
2. אם לא רואים, אפשר להוסיף לקבוצה בסיס ולהפעיל את תהליך גרם–שמידט עד שמוצאים מספיק וקטורים.

נפעל לפי האפשרות השניה – נפעיל את תהליך גרם־שמידט על הקבוצה:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

ונעצור כשיש לנו שלושה וקטורים שאינם אפס. מכיוון שהתחלנו מקבוצה אורתונורמלית נקבל

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

נמשיך בתהליך

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_3 &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathrm{ST}} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathrm{ST}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1+0+0)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - (0+0+0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ננרמל ונקבל

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

מכיוון ש $\{y_1, y_2, y_3\}$ היא קבוצה אורתונורמלית עם שלושה אברים במרחב ממימד 3 זה בסיס אורתונורמלי.

14.6 משלים אורתוגונלי

הגדרה 14.22 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subset V$ תת מרחב. **המשלים האורתוגונלי** של U הוא

$$U^{\perp} = \{x \in V |\ \langle y, x\rangle = 0,\ \forall y \in U\}$$

הערה: ראינו שכדי להראות ש $x \in U^{\perp}$ מספיק לקחת בסיס של U ולהראות ש x מאונך לכל אברי הבסיס.

דוגמה: ב $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסטנדרטית, נמצא את המשלים האורתוגונלי של $U = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

ראינו שמספיק למצוא את כל ה $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ המאונכים לאברי הבסיס. כלומר צריך להתקיים

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathrm{ST}} = x_1 + x_3$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathrm{ST}} = x_2$$

לכן $U^{\perp}$ הוא הפתרון למערכת ההומוגנית הזאת, כלומר

$$U^{\perp} = Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

טענה 14.23 $U^{\perp}$ הוא תת מרחב וקטורי של V.

הוכחה: נראה שמתקיימות הדרישות על תת מרחב:

1. לכל $x \in V$ מתקיים $\langle x, 0\rangle = 0$ ובפרט זה מתקיים לכל $x \in U$.
2. יהיו $x_1, x_2 \in U^{\perp}$ ו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, ויהי $y \in U$. מתקיים

$$\langle y, \alpha x_1 + \beta x_2\rangle = \alpha \langle y, x_1\rangle + \beta \langle y, x_2\rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

ולכן $\alpha x_1 + \beta x_2 \in U^{\perp}$. ■

משפט 14.24 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ויהי $U \subset V$ תת מרחב וקטורי. אז

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

הוכחה: ראשית נראה שהחיתוך מכיל רק את אפס: יהי $x \in U \cap U^{\perp}$ אז

$$\langle x,x\rangle = \left\langle \underbrace{x}_{\in U}, \underbrace{x}_{\in U^{\perp}} \right\rangle = 0$$

ומתכונות המכפלה הפנימית $x=0$. כעת נראה ש $V = U + U^{\perp}$. יהי $x \in V$ אז

$$x = x - P_U(x) + P_U(x)$$

ראינו ש $P_U(x) \in U$ ו־ $x - P_U(x) \in U^{\perp}$ ולכן $x \in U + U^{\perp}$. ■

הערה: מכיוון שבסכום ישר הפירוק הוא יחיד, אנחנו שוב מקבלים שההטלה מוגדרת ביחידות.

תרגיל: (מועד א' תשס"ח). במרחב $M_2(\mathbb{R})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T M B\right)$ כאשר $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, מצאו בסיס אורתונורמלי למשלים האורתוגונלי של $U = Span_{\mathbb{R}}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון: ראינו ש $A \in U^{\perp}$ אם ורק אם $\langle A,B_1\rangle = 0$ ו־ $\langle A,B_2\rangle = 0$ כש $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

נסמן $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ונמצא את התנאים על המקדמים:

$$\langle A,B_1\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T M B_1\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2a+c & -a-2c \\ 2b+d & -b-2d \end{pmatrix} = 2a+c-b-2d$$

$$\langle A,B_2\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T M B_2\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a+2c & 2a+c \\ b+2d & 2b+d \end{pmatrix} = a+2c+2b+d$$

לכן, $A \in U^{\perp}$ אם ורק אם

$$\begin{cases} 2a+c-b-2d & = 0 \\ a+2c+2b+d & = 0 \end{cases}$$

נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

לכן

$$U^{\perp} = Span_{\mathbb{R}}\left\{ \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת צריך להפעיל תהליך גרם־שמידט כדי למצוא בסיס אורתונורמלי.

טענה 14.25 יהי $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסטנדרטית ותהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. אז $(\mathcal{R}(A))^{\perp} = \mathcal{N}(A)$.

הוכחה: נסמן $A = \begin{pmatrix} - & x_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & x_m^T & - \end{pmatrix}$, כלומר, $\mathcal{R}(A) = Span_{\mathbb{F}}\{x_1, \dots, x_m\}$. אז $y \in (\mathcal{R}(A))^{\perp}$ אם ורק אם

$$\langle x_1, y\rangle = \cdots = \langle x_m, y\rangle = 0$$

. מכיוון ש

$$Ay = \begin{pmatrix} - & x_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & x_m^T & - \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} x_1^T y \\ \vdots \\ x_m^T y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1, y\rangle \\ \vdots \\ \langle x_m, y\rangle \end{pmatrix}$$

נקבל

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ y \in \mathbb{F}^n; \begin{pmatrix} \langle x_1, y\rangle \\ \vdots \\ \langle x_m, y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = (\mathcal{R}(A))^{\perp}$$

■

טענה 14.26 יהי $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית ויהי $U \subset V$ תת מרחב וקטורי. אז $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

הוכחה: מתכונות המשלים האורתוגונלי

$$\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$$

$$\dim V = \dim U^{\perp} + \dim \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$$

לכן $\dim U = \dim \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. קבילנו שמספיק להראות ש $U \subset \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. יהי $x \in U$ אז לכל $y \in U^{\perp}$ מתקיים $\langle x, y\rangle = 0$ ולכן $x \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$. ■

הערה: התנאי ש V נוצר סופית חשוב. בלעדיו זה לא בהכרח נכון.

תרגיל: אם $U_1 \subset U_2$ תת מרחב אז $U_2^{\perp} \subset U_1^{\perp}$.

15 מטריצות אורתוגונליות והמשפט הספקטרלי

15.1 מטריצות אורתוגונוליות

בחלק זה נעבוד עם המכפלה הסטנדרטית ב $\mathbb{R}^n$, כלומר $\langle x, y\rangle = x^T y$. נשים לב שעבור $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \left\langle x, A^T y\right\rangle$$

הגדרה 15.1 מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ נקראת מטריצה אורתוגונלית אם $AA^T=I_n$. במקרה כזה מתקיים $A^TA=I_n$ ובפרט A הפיכה ו $A^{-1}=A^T$.

טענה 15.2 התנאים הבאים שקולים:

א. A אורתוגונלית.

ב. שורות A בסיס אורתונורמלי ב $\mathbb{R}^n$.

ג. עמודות A בסיס אורתונרמלי ב $\mathbb{R}^n$.

ד. לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$.

הוכחה: נניח A אורתוגונלית ונניח כי שורות A הן $a_1,...,a_n$, אז אלו הן עמודות A^T ולכן

$$I_n=AA^T=\begin{pmatrix}\langle a_1,a_1\rangle & \cdots & \langle a_1,a_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle a_n,a_1\rangle & \cdots & (a_n,a_n)\end{pmatrix}$$

כלומר שורות A בסיס אורתונורמלי אם ורק אם A אורתוגונלית. בנוסף A אורתוגונלית אם ורק אם A^T אורתוגונלית אז זה נכון גם לעמודות. לבסוף

$$\langle Ax,Ay\rangle=(Ax)^TAy=x^T\left(A^TA\right)y$$

ולכן $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$ לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ אם ורק אם $A^TA=I_n$. ■

מסקנה 15.3 מטריצה אורתוגונלית שומרת על אורכים $\|Ax\|=\|x\|$ ועל זוויות $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$.

הערה: מכך ש $A^TA=I_n$ בהכרח אם A אורתוגונלית אז $\det A=\pm1$, אבל זה לא תנאי מספיק, למשל $\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ אינה אורתוגונלית.

דוגמה חשובה: מטריצת הסיבוב ב $\mathbb{R}^2$. נסמן

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

קל לבדוק שהעמודות מהוות בסיס אורתונורמלי. כפל R_θ בוקטור במישור (כלומר הפעלת ההעתקה $T_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ הנתונה על ידי $T_\theta(v)=R_\theta v$) מסובבת כל וקטור במישור בזווית θ נגד כיוון השעון. ואכן, אם למשל

$$v=\begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\end{pmatrix}$$

אז

$$T_\theta\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha - r\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

בנוסף מתקיים

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_\theta^T$$

דוגמה נוספת למטריצות אורתוגונליות $M_2(\mathbb{R})$ הן מטריצות מהצורה

$$S_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

הן נקראות מטריצות שיקוף, וההעתקה המתאימה $T_{2\theta}$ הינה שיקוף של $\mathbb{R}^2$ ביחס לציר שיקוף בזווית θ ביחס לציר ה x. אלו הן המטריצות האורותוגונליות היחידות ב $M_2(\mathbb{R})$. במימדים גבוהים יותר יש עוד אפשרויות כמובן, למשל ב $M_3(\mathbb{R})$ מטריצות אורתוגונליות מגדירות או סיבוב סביר ציר כלשהו (כמו סביבון) או סיבוב סביב ציר כלשהו יחד עם שיקוף ביחס למישור הניצב לציר (כמו פורפרה).

משפט 15.4 (משפט הפירוק לערכים סינגולריים, singular value decomposition SVD) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, אז קיים פירוק של A מהצורה $A = U\Sigma V^T$ כאשר: $U \in M_m(\mathbb{R})$ ו $V \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצות אורתוגונליות, ו $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה "אלכסונית" (כלומר כל המקדמים $(\Sigma)_{ij}$ כאשר $i \neq j$ הם אפס) כאשר על האלכסון (כלומר האיברים מהצורה $(\Sigma)_{ii}$) מספרים ממשיים חיוביים.

למשפט הזה יש אינספור שימושים חישוביים במדעי המחשב, מתמטיקה שימושית, עיבוד אותות וכו'. הוא לא חלק מהקורס שלנו ותתקלו בהמשך הלימודים.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = U\Sigma V^T$$

15.2 המשפט הספקטרלי

משפט 15.5 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ היא סימטרית אם ורק אם היא ניתנת **ללכסון אורתוגונלי** כלומר אם היא לכסינה והמטריצה המלכסנת P היא אורתוגונלית, כלומר יש ל $\mathbb{R}^n$ בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים של A.

דוגמה: המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ היא סימטרית ולכן מובטח לנו לכסון אורתוגונלי. מתקיים

$$p_A(x)=\det(x\cdot I_3-A)=(x-1)^2(x-4)$$

נמצא מרחבים עצמיים:

$$V_{\lambda=1}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$$V_{\lambda=4}=\mathcal{N}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=Span_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ואכן המרחבים העצמיים מאונכים. נבצע תהליך גרם שמידט על כל מרחב עצמי בנפרד:

עבור $V_{\lambda=1}$:

$$y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{y}_2=x_2-\langle y_1,x_2\rangle y_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$$
$$y_2=\frac{\widetilde{y}_2}{\|\widetilde{y}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

עבור $V_{\lambda=4}$:

$$y_3=\frac{x_3}{\|x_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ואכן $P^TAP = \operatorname{diag}(1,1,4)$ עבור המטריצה האורתוגונלית

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

נראה שהתופעות שראינו בדוגמה מתקיימות לכל מטריצה סימטרית, כלומר נוכיח את המשפט:

הוכחה: $(\Rightarrow)$ נניח כי קיימת P אורתוגונלית עבורה $P^{-1}AP = D$ אלכסונית, כלומר $A = PAP^{-1}$. אז מאורתגונליות ניתן לכתוב $P^{-1} = P^T$ ולכן

$$A^T = \left(PDP^{-1}\right)^T = \left(PDP^T\right)^T = \left(P^T\right)^T D^T P^T = PDP^T = PDP^{-1} = A$$

כלומר A סימטרית.

$(\Leftarrow)$ נניח כי A סימטרית. מהמשפט היסודי של האלגברה $p_A(x)$ מתפרק למכפלת גורמים לינארים מעל המרוכבים. יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ שורש של הפולינום האפייני, כלומר λ ערך עצמי של A, וקיים $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ עבורו

$$\lambda v = Av$$

ניקח צמוד מרוכב על שני האגפים, אז כיוון ש A ממשית נקבל

$$\overline{\lambda}\overline{v} = \overline{\lambda v} = \overline{Av} = A\overline{v}$$

ניקח טרנפוז של שני האגפים ונכפול אותם ב v ונקבל

$$\overline{\lambda}\overline{v}^T v = (A\overline{v})^T v$$

אז אגף שמאל הינו $\overline{\lambda}\|v\|^2$ ואגף ימין הינו

$$(A\overline{v})^T v = \overline{v}^T A^T v = \overline{v}^T A v = \overline{v}^T \lambda v = \lambda \|v\|^2$$

כיוון ש $v \neq 0$ אז $\|v\| \neq 0$ ולכן $\lambda = \overline{\lambda}$ ובפרט $\lambda \in \mathbb{R}$. מכאן קיים וקטור עצמי ממשי $u \in \mathbb{R}^n$ המתאים ל λ.

ננרמל $\widetilde{u} = \frac{u}{\|u\|}$ ונשלים את $\widetilde{u}$ לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$. נציב את איברי הבסיס במטריצה Q. אז Q אורתוגונלית ומתקיים

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

נשים לב שאגף שמאל סימטרי, כי $\left(Q^TAQ\right)^T = Q^TA^TQ = Q^TAQ$ ולכן גם אגף ימין, ולכן

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

כאשר $A_1 \in M_{n-1}\left(\mathbb{R}\right)$ מטריצה סימטרית. באופן זה ניתן להוכיח באינדוקציה על סדר המטריצה שמטריצה סימטרית היא לכסינה. כדי למצוא בסיס אורתוגונלי של וקטורים עצמיים נשאר לנו להוכיח שוקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים שונים הם בהכרח מאונכים, ולכן כל המרחבים העצמיים מאונכים זה לזה, ולהם קיים בסיס עליו נוכל לבצע תהליך גרם שמידט כדי לקבל את הבסיס הנדרש.

ואכן, נניח $Av_1 = \lambda_1 v_1$ ו $Av_2 = \lambda_2 v_2$. אז

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2\rangle$$

ומצד שני

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \left\langle v_1, A^T v_2\right\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2\rangle$$

כלומר $\lambda_1 \langle v_1, v_2\rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2\rangle$ וכיוון ש $\lambda_1 \neq \lambda_2$ קיבלנו שהוקטורים העצמיים אכן מאונכים. ■