

$$V-E+F=2$$

Az Euler-karakterisztika

Szakács Nóra

Bolyai Intézet

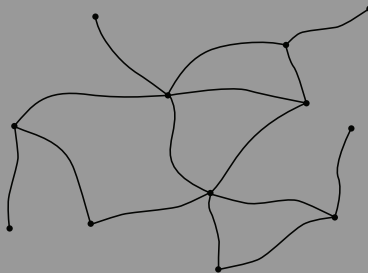
2016.03.01.

	6	12	8
	60	90	32
	2	4	4
	?	?	?

???

Az Euler-tétel 1.

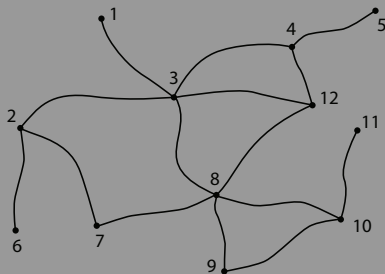
Egy összefüggő, síkbarajzolható gráf esetén legyen



Az Euler-tétel 1.

Egy összefüggő, síkbarajzolható gráf esetén legyen

V : csúcsok száma (*vertices*) 12

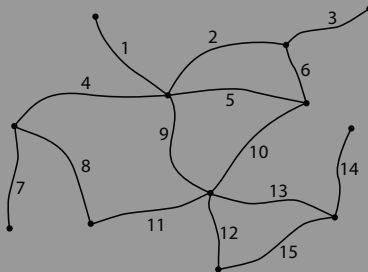


Az Euler-tétel 1.

Egy összefüggő, síkbarajzolható gráf esetén legyen

V : csúcsok száma (*vertices*) 12

E : élek száma (*edges*) 15



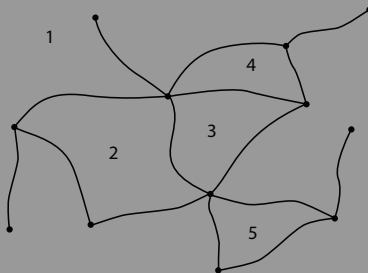
Az Euler-tétel 1.

Egy összefüggő, síkbarajzolható gráf esetén legyen

V : csúcsok száma (*vertices*) 12

E : élek száma (*edges*) 15

F : lerajzoláskor kapott tartományok száma (*faces*) 5



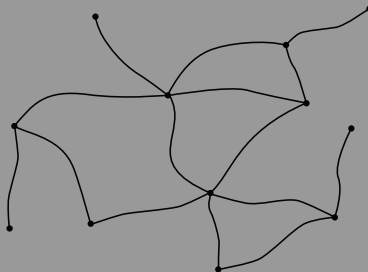
Az Euler-tétel 1.

Egy összefüggő, síkbarajzolható gráf esetén legyen

V : csúcsok száma (*vertices*) 12

E : élek száma (*edges*) 15

F : lerajzoláskor kapott tartományok száma (*faces*) 5



Ekkor $V - E + F = 2$.

Az Euler-tétel 2.

Egy összefüggő, **gömbre rajzolható** gráf esetén legyen V a csúcsok, E az élek, F a tartományok száma. Ekkor is $V - E + F = 2$.

Az Euler-tétel 2.

Egy összefüggő, **gömbre rajzolható** gráf esetén legyen V a csúcsok, E az élek, F a tartományok száma. Ekkor is $V - E + F = 2$.

Visszavezethető a síkra:



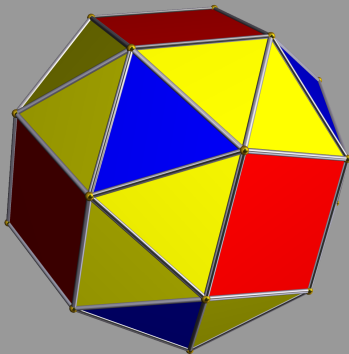
Az Euler-tétel 3.

Legyen egy **konvex** poliéder csúcsanak száma V , éleinek száma E , lapjainak száma F . Ekkor is $V - E + F = 2$.

Az Euler-tétel 3.

Legyen egy **konvex** poliéder csúcsanak száma V , éleinek száma E , lapjainak száma F . Ekkor is $V - E + F = 2$.

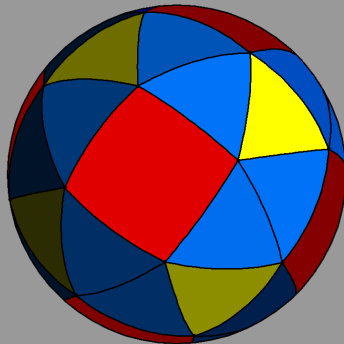
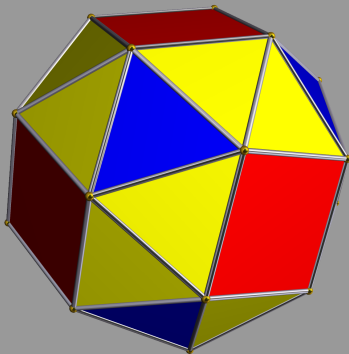
Konvex poliéder



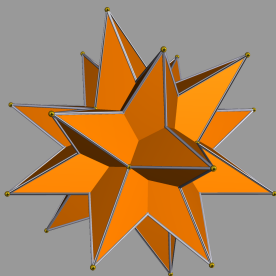
Az Euler-tétel 3.

Legyen egy **konvex** poliéder csúcsának száma V , éleinek száma E , lapjainak száma F . Ekkor is $V - E + F = 2$.

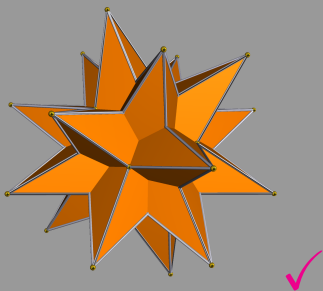
Konvex poliéder $\longleftrightarrow$ gömbre rajzolt gráf



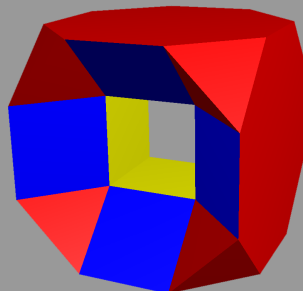
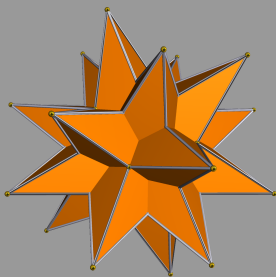
Mi a helyzet nem konvex poliéderekkel?



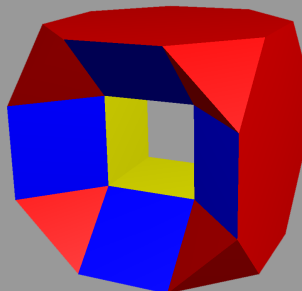
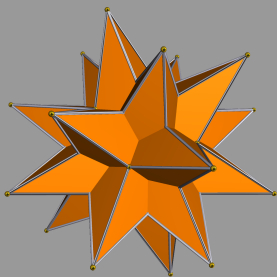
Mi a helyzet nem konvex poliéderekkel?



Mi a helyzet nem konvex poliéderekkel?



Mi a helyzet nem konvex poliéderekkel?



Euler-tétel poliéderekre

Poliéder:

1. sokszöglapok által határolt test (...),
2. ahol a lapokban nem lehet „lyuk”,
3. és feltesszük, hogy poliéder felülete összefüggő

Ekkor minden poliéder esetén $V - E + F = 2 - 2k$, ahol k a polidér **génusza** („lyukak száma”). A $2 - 2k$ szám a poliéder **Euler-karakterisztikája**.

Euler-tétel poliéderekre

Poliéder:

1. sokszöglapok által határolt test (...),
2. ahol a lapokban nem lehet „lyuk”,
3. és feltesszük, hogy poliéder felülete összefüggő

Ekkor minden poliéder esetén $V - E + F = 2 - 2k$, ahol k a polidér **génusza** („lyukak száma”). A $2 - 2k$ szám a poliéder **Euler-karakterisztikája**.

(Megj.: a 3. pontot nem szokás feltenni, ahogy azt sem, hogy a poliéder oldalai ne messék egymást. Ekkor bármilyen egész előjöhét karakterisztikaként.)

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz
 $F = n$.

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz
 $F = n$.
- ▶ egy lapnak

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz
 $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala
van
- ▶ így $E =$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz
 $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz
 $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V =$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz
 $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

2:

- ▶ tfh. n csúcsa van, azaz $V = n$.

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

2:

- ▶ tfh. n csúcsa van, azaz $V = n$.
- ▶ minden csúcsban

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

2:

- ▶ tfh. n csúcsa van, azaz $V = n$.
- ▶ minden csúcsban $n - 1$ él találkozik,
- ▶ így $E =$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

2:

- ▶ tfh. n csúcsa van, azaz $V = n$.
- ▶ minden csúcsban $n - 1$ él találkozik,
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

2:

- ▶ tfh. n csúcsa van, azaz $V = n$.
- ▶ minden csúcsban $n - 1$ él találkozik,
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $F =$

Keressünk olyan poliédert, amely

1. bármely két lapja szomszédos, vagy
2. bármely két csúcsa szomszédos.

1:

- ▶ tfh. n lapja van, azaz $F = n$.
- ▶ egy lapnak $n - 1$ oldala van
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $V = \frac{n(n-1)}{3}$

2:

- ▶ tfh. n csúcsa van, azaz $V = n$.
- ▶ minden csúcsban $n - 1$ él találkozik,
- ▶ így $E = \frac{n(n-1)}{2}$
- ▶ és $F = \frac{n(n-1)}{3}$

Mindkét esetben:

$$2 - 2k = \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} + n$$

Mindkét esetben:

$$2 - 2k = \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$k = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Mindkét esetben:

$$2 - 2k = \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$k = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Van egész megoldás $\iff n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$

Mindkét esetben:

$$2 - 2k = \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$k = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Van egész megoldás $\iff n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$

Legkisebb pozitív megoldás: $n = 4, k = 0$

1. eset: 4 oldal, 6 él, 4 csúcs

Mindkét esetben:

$$2 - 2k = \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$k = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Van egész megoldás $\iff n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$

Legkisebb pozitív megoldás: $n = 4, k = 0$

1. eset: 4 oldal, 6 él, 4 csúcs $\longrightarrow$ tetraéder

Mindkét esetben:

$$2 - 2k = \frac{n(n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} + n$$

$$k = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

Van egész megoldás $\iff n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$

Legkisebb pozitív megoldás: $n = 4, k = 0$

1. eset: 4 oldal, 6 él, 4 csúcs $\longrightarrow$ tetraéder

2. eset: 4 oldal, 6 él, 4 csúcs $\longrightarrow$ tetraéder

Két lyukas poliéder

Második legkisebb pozitív megoldás: $n = 7, k = 1$ (lyukas!)

1. eset: 7 lap, 21 él, 14 csúcs

Két lyukas poliéder

Második legkisebb pozitív megoldás: $n = 7, k = 1$ (lyukas!)

1. eset: 7 lap, 21 él, 14 csúcs $\rightarrow$ Szilassi-poliéder (*Szilassi Lajos, 1977*)

Két lyukas poliéder

Második legkisebb pozitív megoldás: $n = 7, k = 1$ (lyukas!)

1. eset: 7 lap, 21 él, 14 csúcs $\rightarrow$ Szilassi-poliéder (*Szilassi Lajos, 1977*)
2. eset: 14 lap, 21 él, 7 csúcs

Két lyukas poliéder

Második legkisebb pozitív megoldás: $n = 7, k = 1$ (lyukas!)

1. eset: 7 lap, 21 él, 14 csúcs $\rightarrow$ Szilassi-poliéder (*Szilassi Lajos, 1977*)

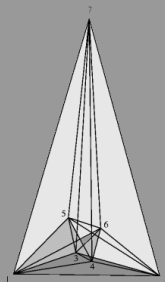
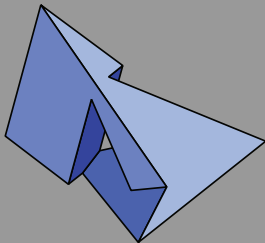
2. eset: 14 lap, 21 él, 7 csúcs $\rightarrow$ Császár-poliéder (*Császár Ákos, 1949*)

Két lyukas poliéder

Második legkisebb pozitív megoldás: $n = 7$, $k = 1$ (lyukas!)

1. eset: 7 lap, 21 él, 14 csúcs $\rightarrow$ Szilassi-poliéder (*Szilassi Lajos, 1977*)

2. eset: 14 lap, 21 él, 7 csúcs $\rightarrow$ Császár-poliéder (*Császár Ákos, 1949*)



Más?

Következő lehetőség: $n = 12, k = 6$

1. eset: 12 oldal, 44 él, 66 csúcs
2. eset: 66 oldal, 44 él, 12 csúcs

Más?

Következő lehetőség: $n = 12, k = 6$

1. eset: 12 oldal, 44 él, 66 csúcs
2. eset: 66 oldal, 44 él, 12 csúcs



Köszönöm a figyelmet!