Lezione 4 (25/8/2023)

Modelli di λ-calcolo tipato in categorie cartesiane chiuse

Nota: nei dati di base di un λ-calcolo tipato, assumiamo non solo un insieme di tipi atomici, ma anche un insieme di simboli di funzione tipati, ovvero dichiarati nella forma

$$f : A_1, \dots, A_n \to B$$

Nel calcolo ci sarà poi anche una regola

$$\frac{\Gamma \vdash a_1 : A_1 \qquad \cdots \qquad \Gamma \vdash a_n : A}{\Gamma \vdash f(a_1, \dots, a_n) : B}$$

Fissiamo adesso un linguaggio $\mathcal{L}$ dato da tipi atomici & simboli di funzione ed una categoria cartesiana chiusa $\mathbb{C}$.

Un <u>modello</u> di $\mathcal{L}$ in $\mathbb{C}$ è una funzione che associa

- un oggetto $[\![A]\!] \in \mathbb{C}$, per ogni tipo atomico A di $\mathcal{L}$
- una freccia $[\![f]\!] : [\![A_1]\!] \times \dots \times [\![A_n]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$, per ogni simbolo di funzione tipato $f : A_1, \dots, A_n \to B$.

Estendiamo ora la funzione a tutti i tipi e termini del calcolo in modo che

- $\Gamma \vdash a : A \quad \rightsquigarrow \quad [\![\Gamma]\!] \xrightarrow{[\![a]\!]} [\![A]\!]$

  $\Gamma \equiv x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \qquad [\![\Gamma]\!] \cong [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$

- $\Gamma \vdash a = a' : A \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} {[\![\Gamma]\!]} \arrow[r, bend left, "{[\![a]\!]}"] \arrow[r, bend right, "{[\![a']\!]}"'] \arrow[r, phantom, "="] & {[\![A]\!]} \end{tikzcd}$$

La definizione è induttiva

- $[\![A \times B]\!] = [\![A]\!] \times [\![B]\!]$

- $[\![A \Rightarrow B]\!] = [\![B]\!]^{[\![A]\!]}$

Per quanto riguarda i termini:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash pair(a,b) : A \times B}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \llbracket \Gamma \rrbracket \arrow[dl, bend right, "\llbracket a \rrbracket"'] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, bend left, "\llbracket b \rrbracket"] & \\
\llbracket A \rrbracket & \llbracket A \rrbracket \times \llbracket B \rrbracket \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & \llbracket B \rrbracket
\end{tikzcd}$$

$$\llbracket pair(a,b) \rrbracket =_{def} pair(\llbracket a \rrbracket, \llbracket b \rrbracket)$$

<u>Nota</u> $\llbracket \Gamma \rrbracket = \llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket$ se $n \geq 1$

$\llbracket \Gamma \rrbracket = 1$ se $\Gamma = ()$.

$$\frac{\Gamma \vdash c : A \times B}{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \pi_1(c) : A \\ \Gamma \vdash \pi_2(c) : B\end{array}}$$

$$\begin{tikzcd}
& {[\![\Gamma]\!]} \arrow[dl, bend right] \arrow[d, "{[\![c]\!]}"] \arrow[dr, bend left] & \\
{[\![A]\!]} & {[\![A]\!] \times [\![B]\!]} \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & {[\![B]\!]}
\end{tikzcd}$$

$[\![\pi_1(c)]\!] =_{def} \pi_1 \circ [\![c]\!]$

$[\![\pi_2(c)]\!] =_{def} \pi_2 \circ [\![c]\!]$

$$\frac{\Gamma,\ x : A \ \vdash\ b : B}{\Gamma\ \vdash\ (\lambda x : A)\, b : A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \xrightarrow{\llbracket b \rrbracket} \llbracket B \rrbracket}{\llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\lambda \llbracket b \rrbracket} \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket}}$$

$$\llbracket (\lambda x : A)\, b \rrbracket = \lambda\left(\llbracket b \rrbracket\right)$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : B^A \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathrm{app}(f, a) : B}$$

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket f \rrbracket} \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket}$$

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{\llbracket a \rrbracket} \llbracket A \rrbracket$$

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \Gamma \rrbracket \arrow[r, "(\llbracket f \rrbracket, \llbracket a \rrbracket)"] \arrow[dr, bend right] & \llbracket B \rrbracket^{\llbracket A \rrbracket} \times \llbracket A \rrbracket \arrow[d, "\mathrm{app}"] \\
& \llbracket B \rrbracket
\end{tikzcd}$$

$$\llbracket \mathrm{app}(f, a) \rrbracket =_{def} \mathrm{app}\left(\llbracket f \rrbracket, \llbracket a \rrbracket\right)$$

Dobbiamo verificare che le β-regole e η-regole siano valide.

Nota (Interpretazione della sostituzione)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash b[a/x] : B} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd}
[\![\Gamma]\!] \arrow[r, "{(1, [\![a]\!])}"] \arrow[rr, bend right] & {[\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!]} \arrow[r, "{[\![b]\!]}"] & {[\![B]\!]}
\end{tikzcd}$$

$$[\![b[a/x]]\!] = [\![b]\!] \circ (1, [\![a]\!]).$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash app((\lambda x : A)b, a) = b[a/x] : B}$$

- $\Gamma \times A \xrightarrow{b} B \qquad \Gamma \xrightarrow{a} A \qquad \rightsquigarrow \qquad \Gamma \xrightarrow{\lambda(b)} B^A$
- $\Gamma \xrightarrow{(\lambda(b), a)} B^A \times A \xrightarrow{app} B$
- $\Gamma \xrightarrow{(1_\Gamma, a)} \Gamma \times A \xrightarrow{b} B$

Da verificare:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(\lambda(b), a)}"] \arrow[d, "{(1_\Gamma, a)}"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & B^A \times A \arrow[d, "app"] \\
\Gamma \times A \arrow[r, "b"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, "{(\lambda(b), a)}"] \arrow[d, "{(1_\Gamma, a)}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B^A \times A \arrow[d, "app"] \\
\Gamma \times A \arrow[ur, "\lambda(b) \times 1_A"] \arrow[r, "b"'] \arrow[r, phantom, bend left, "(2)"] & B
\end{tikzcd}
$$

Vogliamo utilizzare

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \times A \arrow[d, "\lambda(b) \times 1_A"'] \arrow[dr, bend left, "b"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \\
B^A \times A \arrow[r, "app"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Rimane da dimostrare

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[d, "{(1_\Gamma, a)}"] \arrow[dd, bend right=60, "{(\lambda(b), a)}"'] \\
\Gamma \times A \arrow[d, "\lambda(b) \times 1_A"] \\
B^A \times A
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \Gamma \arrow[ddll, bend right, "\lambda(b)"'] \arrow[ddrr, bend left, "a"] \arrow[d, "(1_\Gamma, a)"] \arrow[ddl, "1_\Gamma"'] \arrow[dl, phantom, "(5)"] \arrow[ddll, phantom, "(1)"] \arrow[ddrr, phantom, "(2)"] & & \\
 & & \Gamma \times A \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, "\lambda(b) \times 1_A"] & & \\
 & \Gamma \arrow[dl, "\lambda(b)"'] \arrow[d, phantom, "(3)"] & & A \arrow[dr, "1_A"] \arrow[d, phantom, "(4)"] & \\
B^A & & B^A \times A \arrow[ll, "\pi_2"] \arrow[rr, "\pi_2"'] & & A
\end{tikzcd}
$$

(1) ✓

(2) ✓

(3) , (4) def di $f \times g$

(5) ✓

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_1(\mathrm{pair}(a,b)) = a : A}$$

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma \arrow[dl, bend right, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{pair}(a,b)"] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\checkmark"] \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"]
\end{tikzcd}$$

$$\frac{\Gamma \vdash c : A \times B}{\Gamma \vdash c = \mathrm{pair}(\pi_1 c, \pi_2 c) : A \times B}$$

$$\begin{tikzcd}
& \Gamma \arrow[dl, bend right, "\pi_1 c"'] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, bend left, "\pi_2 c"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

$$c = B(\pi_1 c, \pi_2 c)$$

per unicità

Esercizio

Inventare le regole per un tipo 1

la cui semantica sia data dall'oggetto terminale di $\mathbb{C}$.

Nota

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \Gamma \times A \xrightarrow{\pi_1} A$$

$$x : A \vdash x : A \qquad 1 \times A \cong A \longrightarrow A$$

Teorema di Validità Data una assegnazione di oggetti a tipi atomici e frecce a simboli di funzione, tutte le regole del λ-calcolo tipato sono valide in $\mathbb{C}$, categoria cartesiana chiusa.

Teorema di Completezza Se un giudizio del λ-calcolo tipato è valido in ogni categoria cartesiana chiusa, allora esso è derivabile.

<u>Dim</u> Dato $\mathcal{L}$ con tipi atomici e simboli di funzione costruiamo una categoria cartesiana chiusa $Syn(\mathcal{L})$, detta la categoria sintattica associata ad $\mathcal{L}$.

- <u>oggetti</u> : sono i tipi del λ-calcolo tipato (ovvero la chiusura dei tipi atomici per prodotti ed esponenziali)

- <u>mappe</u> : $f : A \longrightarrow B$ è un termine $x : A \vdash f : B$, modulo uguaglianze dimostrabili nel calcolo.

Rimane da dimostrare che $\mathrm{Syn}(\mathcal{L})$ è cartesiana chiusa

<u>Esempio</u>: Dati $A, B \in \mathrm{Syn}(\mathcal{L})$, $A \times B \in \mathrm{Syn}(\mathcal{L})$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, bend right, "a"'] \arrow[dr, bend left, "b"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} x : X \vdash a : A \\ x : X \vdash b : B \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad x : X \vdash \mathrm{pair}(a, b) : A \times B$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mathrm{pair}(a,b)"] \\ A \times B \end{tikzcd}$$

Dim (teorema di completezza)

Validità in $\mathrm{Syn}(\mathcal{L})$ $\iff$ Dimostrabilità in $Ty_{\mathcal{L}}$.

Altri usi di $\mathrm{Syn}(\mathcal{L})$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & \mathrm{Syn}(\mathcal{L}) \arrow[d, dashed] \\
 & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{C}$ categoria cartesiana chiusa

Slogan:

modelli di $\mathcal{L}$ in $\mathbb{C}$

$=$

funtori da $\mathrm{Syn}(\mathcal{L})$ in $\mathbb{C}$

che preservano prodotti e

esponenziali strettamente

Data una categoria cartesiana chiusa $\mathbb{C}$, definiamo

$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ come il linguaggio

- tipi atomici = oggetti di $\mathbb{C}$ $\qquad A, B$
- simboli di funzione $f : A_1, \dots, A_n \to B$ =

  mappe $f : A_1 \times \dots \times A_n \longrightarrow B$

(Vanno anche aggiunte equazioni in modo da identificare tipi e termini della teoria generata da $\mathcal{L}$ con gli appropriati oggetti di $\mathbb{C}$).

$\mathcal{L}$

$Ty_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}}$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\;F\;} \mathbb{D}$$

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{C}}(\mathbb{D}) = \underbrace{\mathrm{ccc}[\mathbb{C}, \mathbb{D}]}$$

subcategory of $[\mathbb{C}, \mathbb{D}]$
spanned by functors
preserving ccc
structure strictly,