

## Lezione 4 (25/8/2023)

### Modelli di $\lambda$ -calcolo tipato in categorie cartesiane chiuse

Nota: nei dati di base di un  $\lambda$ -calcolo tipato, assumiamo non solo un insieme di tipi atomici, ma anche un insieme di simboli di funzione tipati, ovvero dichiarati nella forma

$$f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$$

Nel calcolo ci sarò poi anche una regola

$$\frac{\Gamma \vdash a_1 : A_1 \quad \dots \quad \Gamma \vdash a_n : A_n}{\Gamma \vdash f(a_1, \dots, a_n) : B}$$

Fissiamo adesso un linguaggio  $L$  dato da tipi atomici e simboli di funzione ed una categoria cartesiana chiusa  $\mathbb{C}$ .

Un modello di  $L$  in  $\mathbb{C}$  è una funzione che associa

- un oggetto  $\llbracket A \rrbracket \in \mathbb{C}$ , per ogni tipo atomico  $A$  di  $L$
- una freccia  $\llbracket f \rrbracket : \llbracket A_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket A_n \rrbracket \rightarrow \llbracket B \rrbracket$ , per ogni simbolo di funzione tipo  $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ .

Estendiamo ora la funzione a tutti i tipi e termini del calcolo in modo che

- $\Gamma \vdash a : A$   
 $\xi$   
 $x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$

 $\rightsquigarrow$ 

$$\begin{array}{ccc} & & \xrightarrow{[a]} [A] \\ & \begin{array}{c} [\Gamma] \\ \times \\ [A_1] \times \dots \times [A_n] \end{array} & \end{array}$$

- $\Gamma \vdash a = a' : A$

 $\rightsquigarrow$ 

$$\begin{array}{ccc} & & [a] \\ & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ [A] \\ \curvearrowleft \\ [a'] \end{array} & \xrightarrow{=} [A] \\ & & [a'] \end{array}$$

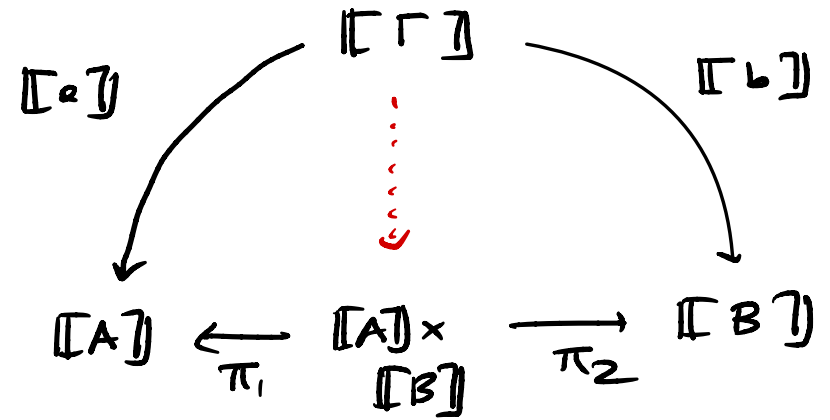
La definizione è induttiva

- $[A \times B] = [A] \times [B]$

- $[A \Rightarrow B] = [B]^{[A]}$

Per quanto riguarda i termini:

$$\frac{\Gamma \vdash a:A \quad \Gamma \vdash b:B}{\Gamma \vdash \text{pair}(a,b): A \times B}$$



$$[\text{pair}(a,b)] =_{\text{def}} \text{pair}([a], [b])$$

Note  $[\Gamma] = [A_1] \times \dots \times [A_n]$

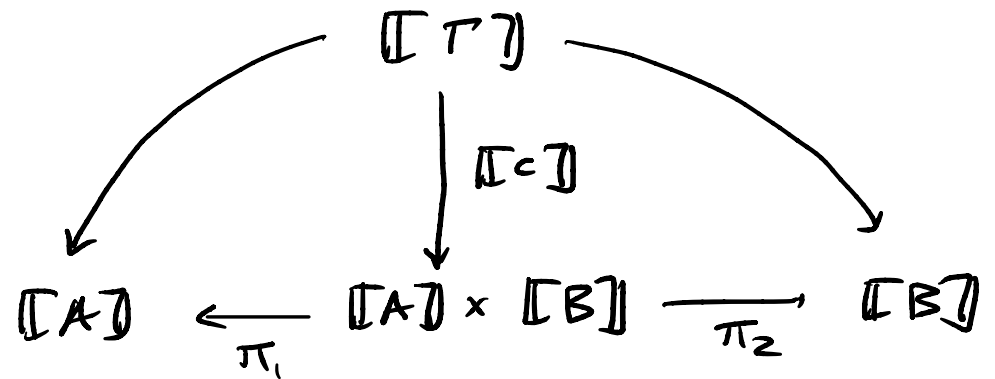
se  $n \geq 1$

$$[\Gamma] = 1$$

se  $\Gamma = ()$ .

$$\Gamma \vdash c : A \times B$$

---

$$\Gamma \vdash \pi_1(c) : A$$
$$\Gamma \vdash \pi_2(c) : B$$

$$[[\pi_1(c)]] =_{\text{def}} \pi_1 \circ [c]$$
$$[[\pi_2(c)]] =_{\text{def}} \pi_2 \circ [c]$$

$$\Gamma, x:A \vdash b:B$$

---

$$\Gamma \vdash (\lambda x:A) b : A \Rightarrow B$$

$$[\Gamma] \times [A] \xrightarrow{[b]} [B]$$

---

$$[\Gamma] \xrightarrow{\lambda [b]} [B]^{[A]}$$

$$[(\lambda x:A) b] = \lambda ([b])$$

$$\Gamma \vdash f : B^A$$

$$\Gamma \vdash a : A$$

---

$$\Gamma \vdash \text{app}(f, a) : B$$

$$[\Gamma] \xrightarrow{[f]} [B]^{[A]}$$

$$[\Gamma] \xrightarrow{[a]} [A]$$

$$[\Gamma] \xrightarrow{([f], [a])} [B]^{[A]} \times [A]$$

↓ app

$$[\text{app}(f, a)] =_{\text{def}}$$

$$\text{app}([f], [a])$$

$$[B]$$

Dobbiamo verificare che le  $\beta$ -regole e  $\eta$ -regole siano valide.

Nota (Interpretazione delle sostituzioni)

$$\frac{\Gamma, x:A \vdash b:B \quad \Gamma \vdash a:A}{\Gamma \vdash b[a/x]: B} \rightsquigarrow$$

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \xrightarrow{(1, \llbracket a \rrbracket)} \llbracket \Gamma \rrbracket \times \llbracket A \rrbracket \xrightarrow{\llbracket b \rrbracket} \llbracket B \rrbracket$$

$$\llbracket b[a/x] \rrbracket = \llbracket b \rrbracket \circ (1, \llbracket a \rrbracket).$$

$$\Gamma, x:A \vdash b:B$$

$$\Gamma \vdash a:A$$

---


$$\Gamma \vdash \text{app}((\lambda x:A)b, a) = b[a/x] : B$$

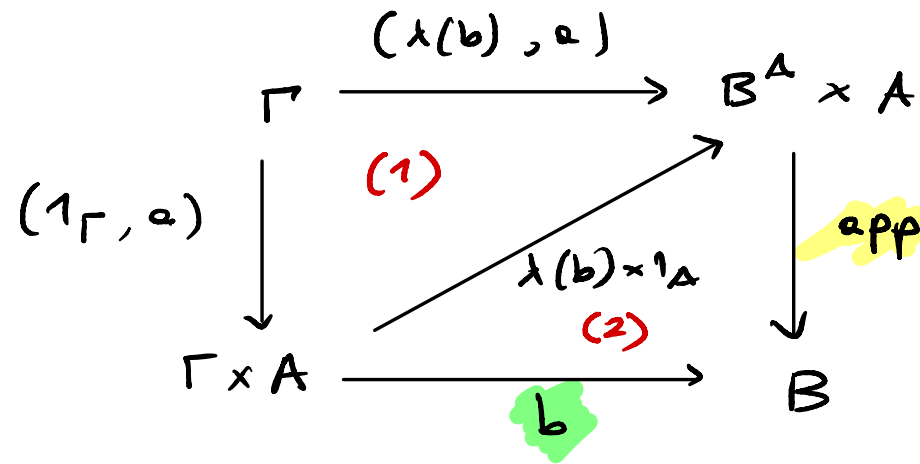
- $\Gamma \times A \xrightarrow{b} B$        $\Gamma \xrightarrow{a} A$        $\leadsto$        $\Gamma \xrightarrow{\lambda(b)} B^A$
- $\Gamma \xrightarrow{(\lambda(b), a)} B^A \times A \xrightarrow{\text{app}} B$
- $\Gamma \xrightarrow{(1_\Gamma, a)} \Gamma \times A \xrightarrow{b} B$

Da verificare:

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{(\lambda(b), a)} & B^A \times A \\
 \downarrow (1_\Gamma, a) & & \downarrow \text{app} \\
 \Gamma \times A & \xrightarrow{b} & B
 \end{array}$$

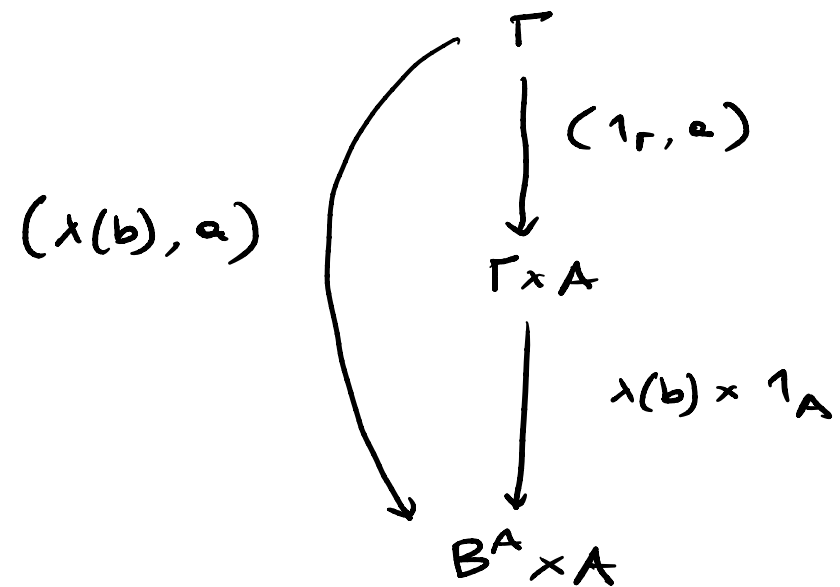
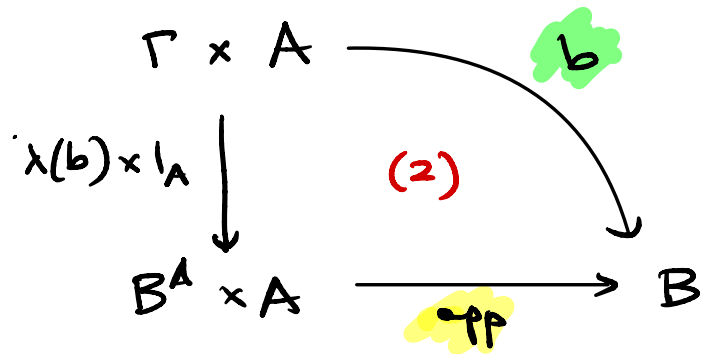
?

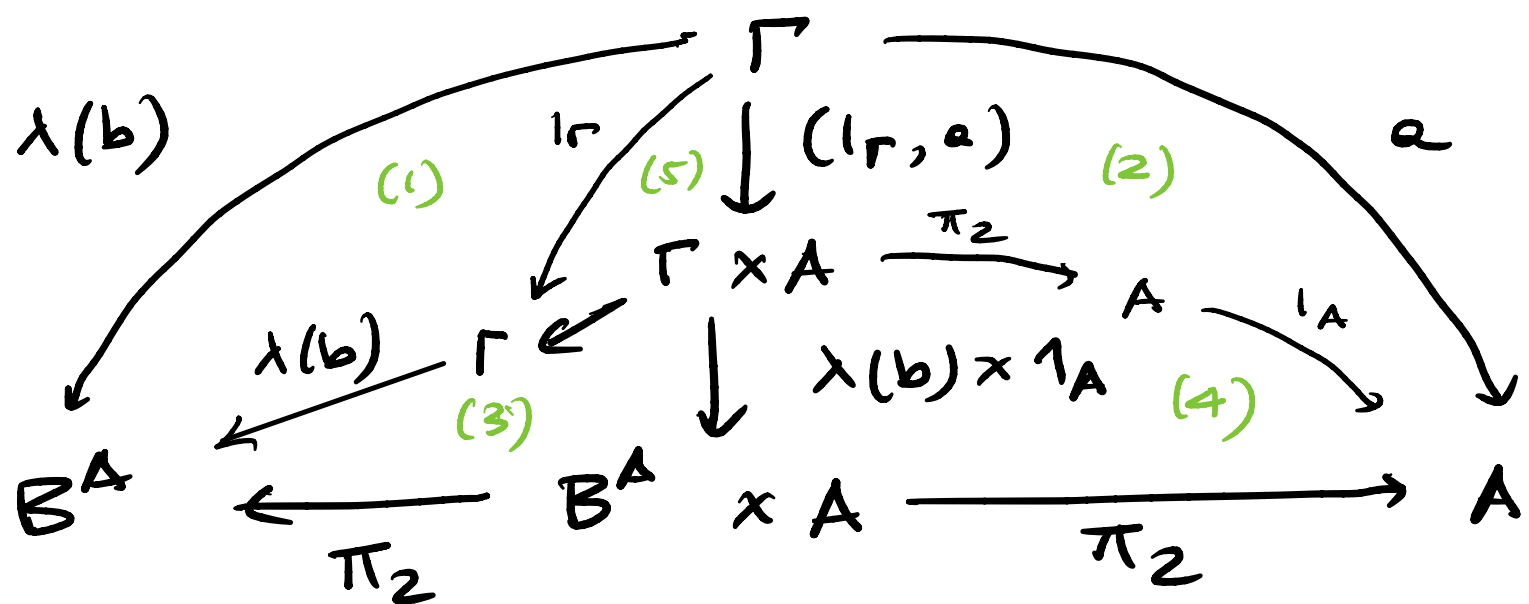




Vogliamo utilizzare

Rimane da dimostrare





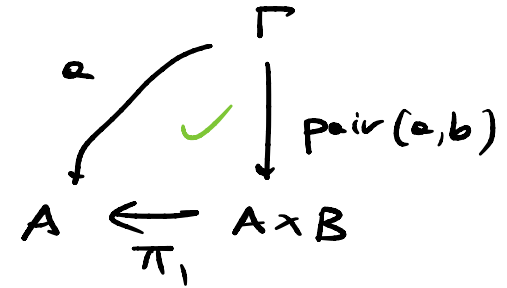
(1) ✓

(2) ✓

(3), (4) def di  $f \times g$

(5) ✓

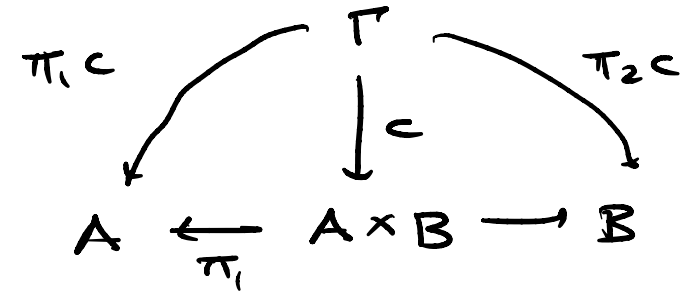
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \pi_1(\text{pair}(a, b)) = a : A}$$



$$\Gamma \vdash c : A \times B$$


---

$$\Gamma \vdash c = \text{pair}(\pi_1 c, \pi_2 c) : A \times B$$



$$c = \text{pair}(\pi_1 c, \pi_2 c)$$

per unicità

## Esercizio

Inventare le regole per un tipo  $\perp$

la cui semantica sia data dall'oggetto terminale di  $\mathcal{C}$ .

## Nota

$$\frac{}{\Gamma, x:A \vdash x:A}$$

$$x:A \vdash x:A$$

$$\Gamma \times A \xrightarrow{\pi_1} A$$

$$1 \times A \cong A \longrightarrow A$$

Teorema di Validità      Data una assegnazione di  
oggetti e tipi atomici e frecce e simboli di funzione,  
tutte le regole del  $\lambda$ -calcolo tipato sono valide  
in  $\mathbb{C}$ , categoria cartesiana chiusa.

Teorema di Completezza      Se un giudizio del  $\lambda$ -  
calcolo tipato è valido in ogni categoria  
cartesiana chiusa, allora esso è derivabile.

Dim Dato  $\mathcal{L}$  con tipi atomici e simboli di funzione  
costruisci una categoria cartesiana chiusa  $\text{Syn}(\mathcal{L})$ ,  
detta la categoria sintattica associata ad  $\mathcal{L}$ .

• oggetti : sono i tipi del  $\lambda$ -calcolo tipato  
(ovvero la chiusura dei tipi atomici per  
prodotti ed esponenziali)

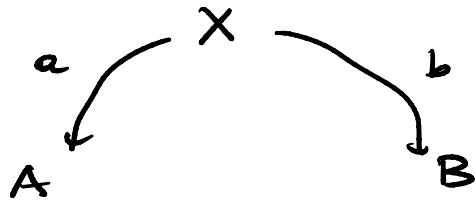
• mappe :  $f: A \longrightarrow B$  e' un termine

$x: A \vdash f: B$  , modulo  $\equiv$  uguaglianze

dimostrabili nel calcolo.

Rimane da dimostrare che  $\text{Sgu}(d)$  è cartesiana  
chiusa

Esempio: Dati  $A, B \in \text{Sgu}(K)$ ,  $A \times B \in \text{Sgu}(K)$



$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} x: X \vdash a: A \\ x: X \vdash b: B \end{array}$$

$$\rightsquigarrow x: X \vdash \text{pair}(a, b): A \times B$$

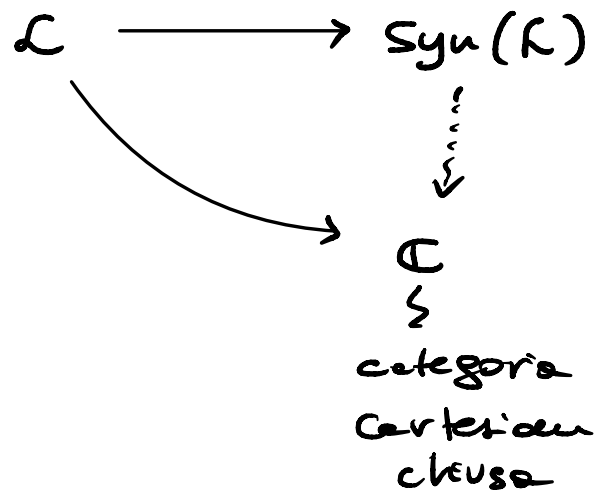
$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} X \\ \downarrow \text{pair}(a, b) \\ A \times B \end{array}$$

Dim (teoremi di completezza)

Validità in  $Syn(K)$   $\Leftrightarrow$  Dimostrabilità in  $TyR$ .

Altri usi di  $Syn(K)$

---



Slogan :

modelli di  $L$  in  $\mathbb{C}$

=

funtori da  $Syn(K)$  in  $\mathbb{C}$

che preservano prodotti e

esponenti strettamente



Dato una categoria cartesiana chiusa  $\mathbb{C}$ , definiamo

$L_{\mathbb{C}}$  come il linguaggio

• tipi atomici = oggetti di  $\mathbb{C}$   $A, B$

• simboli di funzione  $f : A_1, \dots, A_n \rightarrow B =$

mappe  $f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B$

(Vanno anche aggiunte equazioni in modo da  
identificare tipi e termini della teoria generata  
da  $L$  con gli appropriati oggetti di  $\mathbb{C}$ ).

$L$

$Ty_{L_{\mathbb{C}}}$

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

$$\text{Mod}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) = \underbrace{\text{CCC}[\mathcal{C}, \mathcal{D}]}_{\substack{\text{subcategory of } [\mathcal{C}, \mathcal{D}] \\ \text{spanned by functors} \\ \text{preserving CCC} \\ \text{structure strictly,}}}$$