

Lezione 3 (25/8/2023) : categorie cartesiane chiuse

Aggiunzioni

Def. Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} categorie. Un'aggiunzione tra \mathcal{C} e \mathcal{D} consiste di

- funtori $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$
- per ogni $X \in \mathcal{C}, A \in \mathcal{D}$ una biiezione

$$\varphi_{X,A} : \mathcal{C}(X, GA) \longrightarrow \mathcal{D}(FX, A)$$

tali che :

(i) per ogni $u: X' \rightarrow X$ in \mathbb{C} e $A \in \mathbb{D}$

$$\begin{array}{ccccc}
 X \xrightarrow{f} GA & \Rightarrow & \mathbb{C}(X, GA) & \xrightarrow{\varphi_{X,A}} & \mathbb{D}(FX, A) & & FX \xrightarrow{f} A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} GA & \Rightarrow & \mathbb{C}(X', GA) & \xrightarrow{\varphi_{X',A}} & \mathbb{D}(FX', A) & & FX' \xrightarrow{Fu} FX \xrightarrow{f} A
 \end{array}$$

(ii) per ogni $X \in \mathbb{C}$, $v: A \rightarrow A'$ in \mathbb{D}

$$\begin{array}{ccccc}
 X \xrightarrow{f} GA & \Rightarrow & \mathbb{C}(X, GA) & \xrightarrow{\varphi_{X,A}} & \mathbb{D}(FX, A) & \Rightarrow & FX \xrightarrow{f} A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X \xrightarrow{f} GA \xrightarrow{Gv} GA' & & \mathbb{C}(X, GA') & \xrightarrow{\varphi_{X,A'}} & \mathbb{D}(FX, A') & \Rightarrow & FX \xrightarrow{f} A \xrightarrow{v} A'
 \end{array}$$

Notazione / terminologie

- F è detto aggiunto **sinistro**, G l'aggiunto **destro**
- $F + G$
- Per $f: X \rightarrow GA$, scriveremo $f^\# : FX \rightarrow A$ al posto di $\varphi(f)$, detta la **trasmessa** di f
- Riscriviamo (i), (ii)

$$f^\# \cdot Fu = (f \cdot u)^\#$$

$$v \cdot f^\# = (Gv \cdot f)^\#$$

Esempio

$$\underline{\text{Set}} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{u} \end{array} \underline{\text{Mon}}$$

• $FX =$ monoide libero generato da X

• $\underline{\text{Set}}(X, M) \cong \underline{\text{Mon}}(FX, M)$

Teorema Sia $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ un funtore. Le seguenti

condizioni sono equivalenti:

(1) $\exists F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, φ famiglia di biezioni che fornisce
un'aggiunzione

(2) $\exists F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ e trasformazioni naturali

$$\eta: 1_{\mathbb{C}} \Rightarrow GF, \quad \varepsilon: FG \Rightarrow 1_{\mathbb{D}}$$

t.c.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow 1_F & \downarrow \varepsilon F \\ & & F \end{array}$$

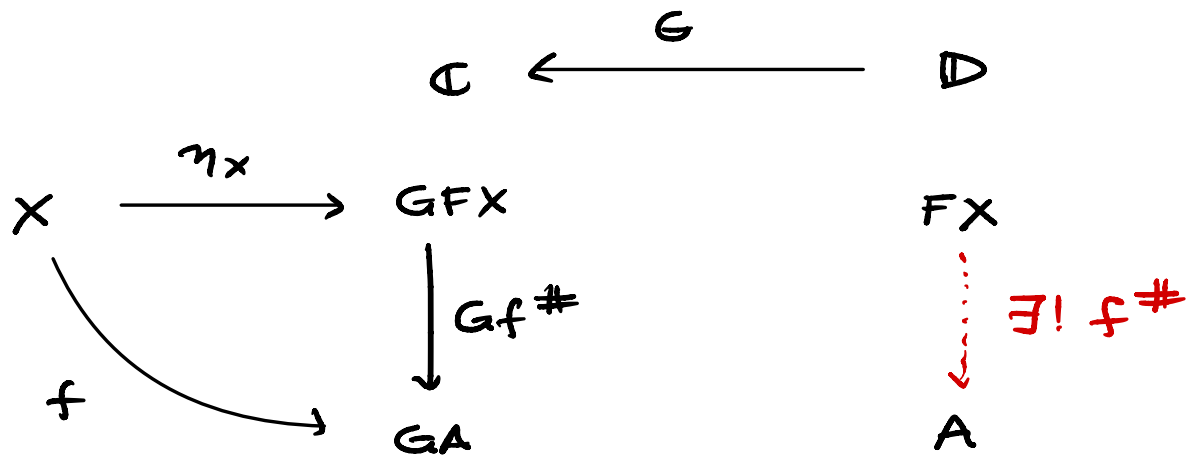
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow 1_G & \downarrow G\varepsilon \\ & & G \end{array}$$

(3) Per ogni $X \in \mathbb{C}$, abbiamo

- $FX \in \mathbb{D}$
- $\eta_X: X \rightarrow GFX$

che sono universali, nel senso che per ogni

- $A \in \mathbb{D}$
- $f: X \rightarrow GA$

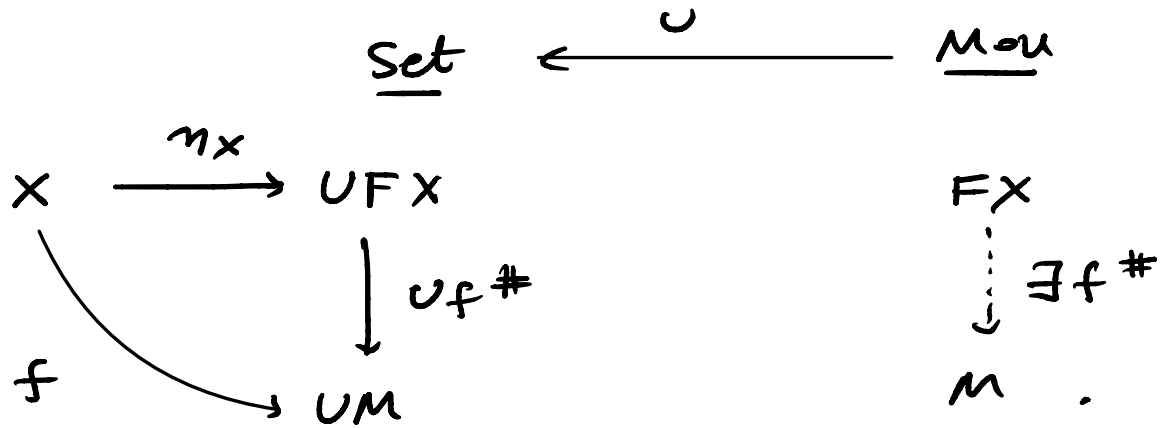


ovvero, la funzione

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(X, GA) & \xleftarrow{G(-) \cdot \eta_x} & \mathcal{D}(FX, A) \\
 X \xrightarrow{\eta_x} GFX \xrightarrow{Gu} GA & \xleftarrow{\quad} & FX \xrightarrow{u} A
 \end{array}$$

è biettiva, con inversa $(-)^{\#}$.

Esempio La condizione (3) per Mon vs Set diventa



Nota Partendo dalla condizione (3), si può estendere

F ad un funtore:

$$f: X \rightarrow Y \quad \xrightarrow{\quad ? \quad} \quad FX \xrightarrow{Ff} FY$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D} \\
 X & \xrightarrow{\eta_X} & GFX \\
 \downarrow f & & \downarrow Gf \\
 Y & \xrightarrow{\eta_Y} & GFY \\
 & & \text{FX} \\
 & & \vdots \\
 & & \text{FY}
 \end{array}
 \quad \exists! F(f) =_{\text{def}} (\eta_Y \cdot f)^{\#}$$

Da dimostrare: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$F(1_X) = 1_{FX}$$

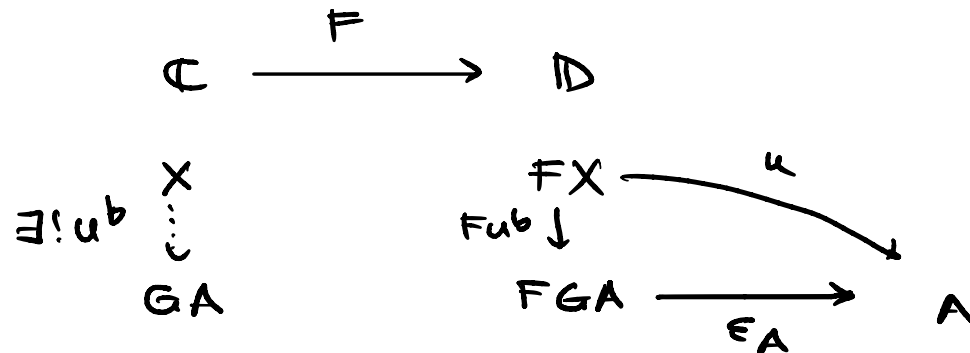
Note Il teorema precedente ha un duale, in cui si assume $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ e si hanno condizioni (3') per ottenere un oggetto destro:

(3') Per ogni $A \in \mathbb{D}$, abbiamo

- $GA \in \mathbb{C}$
- $\epsilon_A: FGA \rightarrow A$

che sono universali, nel senso che per ogni

- $X \in \mathbb{C}$
- $u: FX \rightarrow A$



Prodotti binari

Def Sia \mathcal{C} una categoria. Diremo che \mathcal{C} ha **prodotti binari** se per ogni $A, B \in \mathcal{C}$ abbiamo

- un oggetto $A \times B \in \mathcal{C}$
- mappe, dette **proiezioni**, $\pi_1: A \times B \rightarrow A$, $\pi_2: A \times B \rightarrow B$

universali, nel senso che per ogni

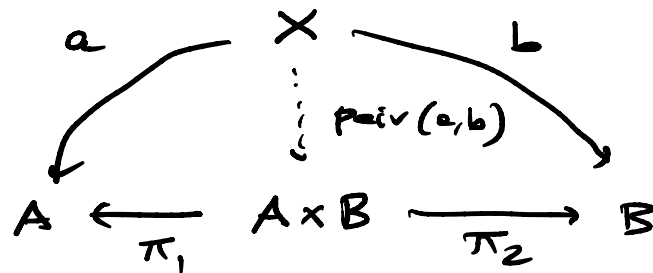
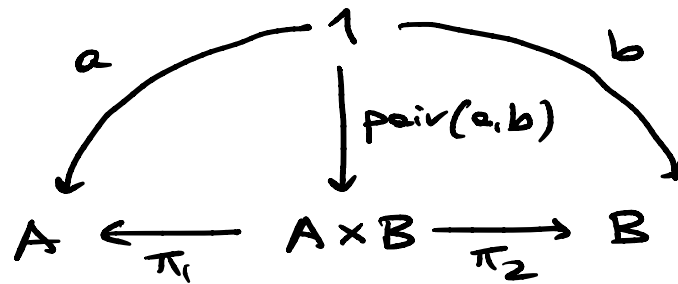
- $X \in \mathcal{C}$
- mappe $a: X \rightarrow A$, $b: X \rightarrow B$

esiste un'unica mappa $\text{pair}(a, b): X \rightarrow A \times B$ t.c.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow a & & \searrow b & \\ & & \downarrow \text{pair}(a, b) & & \\ A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \end{array}$$

Esempi Set , Grp , ... , Top , PsH(C) .

In Set : mappa $1 \xrightarrow{x} S \iff x \in S$



Prop \mathcal{C} ha prodotti bivari se e solo se

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

ha un aggiunto destro, con in particolare

$$\underbrace{(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \left(\underbrace{(x, x)}_{\Delta x}, (A, B) \right)}_{\text{"}} \cong \mathcal{C} \left(x, \underbrace{A \times B}_{\substack{\text{aggiunto dx} \\ \text{applicato ad } (A, B)}} \right)$$

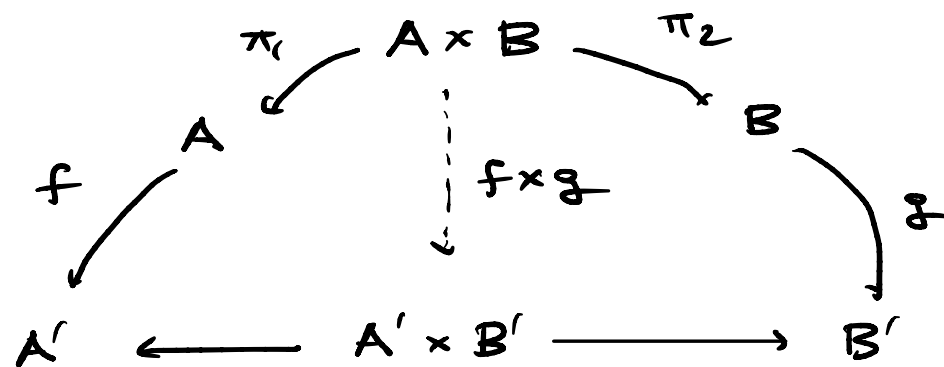
Nella versione (3') di aggiunzione, ε è qui dato

$$\text{da } (\pi_1, \pi_2) : (A \times B, A \times B) \longrightarrow (A, B).$$

Osservazioni L'operazione $A, B \mapsto A \times B$ si estende

ad un funtore: dati $A \xrightarrow{f} A'$, $B \xrightarrow{g} B'$

defuiamo $f \times g: A \times B \rightarrow A' \times B'$ come



Esercizio Se \mathcal{C} ha oggetto terminale 1 e prodotti binari

$$(i) \quad A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$$

$$(ii) \quad 1 \times A \cong A \cong A \times 1$$

$$(iii) \quad A \times B \cong B \times A$$

Esponenziali

Sia \mathcal{C} una categoria con prodotti binari.

Def Diremo che \mathcal{C} ha **esponenziali** se, dato $A \in \mathcal{C}$,

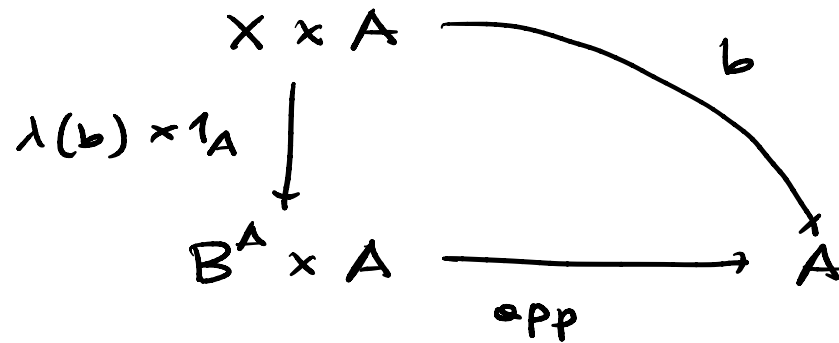
per ogni $B \in \mathcal{C}$, abbiamo

- un oggetto $B^A \in \mathcal{C}$
- una mappa $\text{app} : B^A \times A \rightarrow B$

universali, nel senso che per ogni

- $X \in \mathcal{C}$
- mappa $b : X \times A \rightarrow B$

esiste un'unica mappa $\lambda(b) : X \rightarrow B^A$ t.c.



Prop \mathbb{C} ha esponenti se e solo se $\forall A \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{(-) \times A} \mathbb{C}$$

ha un aggiunto destro $(-)^A$, con

$$\mathbb{C}(X \times A, B) \cong \mathbb{C}(X, B^A)$$

Esempi Set, ~~Grup~~, ~~Top~~, $\text{Psh}(\mathcal{C})$.

Definizione Una categoria \mathcal{C} è detta essere cartesiana chiusa se ha oggetto terminale (1)
prodotti binari ($A \times B$) ed esponenziali (B^A).

Isomorfismo di Curry - Howard - Lawvere

Logica	Teoria dei tipi	Categorie
A, B, \dots formule	A, B, \dots tipi	A, B, \dots oggetti
$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash a : A$	$X \xrightarrow{a} A$
$A \wedge B$	$A \times B$	$A \times B$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	B^A
\top	1	1

Esercizio : Sia \mathcal{C} una categoria cartesiana chiusa.

Si costruiscono mappe :

$$\textcircled{1} \quad B^A \times C^B \longrightarrow C^A$$

$$\textcircled{2} \quad B_1^A \times B_2^A \longrightarrow (B_1 \times B_2)^A$$

$$\textcircled{3} \quad (C^B)^A \times B \longrightarrow C^A$$

$\textcircled{3}$:

$$(C^B)^A \times B \longrightarrow C^A$$

$$(C^B)^A \times B \times A \longrightarrow C$$

$$(C^B)^A \times A \times B \longrightarrow C$$

$$(C^B)^A \times A \times B \xrightarrow{\text{pp} \times 1_B} C^B \times B \xrightarrow{\text{pp}} C$$

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{FX \rightarrow A}} \\ X \rightarrow GA \end{array}$$