C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **320** (1995), 25–30

# Bifurcation générique d'ondes rotatives d'isotropie maximale

Pascal CHOSSAT, Muriel KŒNIG et James MONTALDI
Institut Non Linéaire de Nice[1]

**Résumé** – I. Melbourne [9] a énoncé récemment un théorème d'existence sur la bifurcation générique d'ondes rotatives d'isotropie maximale pour les champs de vecteurs équivariants par l'action absolument irréductible d'un groupe de Lie compact. La démonstration de Melbourne se base sur des résultats récents de Field [4, 5]. Les ondes rotatives peuvent s'interpréter aussi comme des équilibres sur l'espace des orbites pour l'action du groupe, et le but de cette Note est de donner une démonstration géométrique directement sur cet espace des orbites, de façon analogue à celle d'une Note précédente [7].

## Generic bifurcation of rotating waves with maximal isotropy

**Abstract** – *I. Melbourne [9] has recently announced an existence theorem for generic bifurcation of rotating waves with maximal isotropy for vector fields which are equivariant under an absolutely irreducible action of a compact Lie group. Melbourne's proof relies on recent results of Field [4, 5]. Rotating waves can also be interpreted as equilibria on the orbit space of the group action, and the purpose of this note is to present a proof using geometric arguments directly on this orbit space, arguments similar to those of [7].*

**Abridged English Version** Let G be a compact Lie group acting absolutely irreducibly on a finite dimensional vector space V. We consider a generic (see lemma 1 for the definition of the set $\mathcal{H}(V)$ of generic vector fields) G-equivariant smooth vector field $\dot{x} = f(x, \lambda)$, $f(0,0) = 0$ which has a non-degenerate stationary bifurcation at $(0,0)$. I. Melbourne [9] has recently given an existence theorem for branches of *rotating waves* (relative equilibria foliated by periodic solutions) bifurcating from zero for two classes of maximal isotropy subgroups; he also gives explicit examples of such bifurcations for each of those classes. Melbourne's proof is based on recent results of Field [4, 5]. Our proof of this existence result uses the projection of the vector field on the orbit space $V/G$, as done in [7]. If we consider $\theta_1(x) = \|x\|^2, \ldots, \theta_l(x)$ a minimal Hilbert basis of G-invariant homogeneous polynomials, $V/G$ can be identified with the image of $\rho : x \in V \mapsto (\theta_1(x), \ldots, \theta_l(x)) \in \mathbf{R}^l$ and is stratified by isotropy types.

Let $\Sigma$ be a maximal isotropy subgroup of G and $\mathrm{Fix}(\Sigma)) = \{x \in V \mid \sigma x = x \,\forall\, \sigma \in \Sigma\}$ be its flow-invariant *fixed-point subspace*. If $N(\Sigma)$ denotes the *normalizer* of $\Sigma$, then $N = N(\Sigma)/\Sigma$ acts fixed-point freely on $\mathrm{Fix}(\Sigma))$. Following [2, Theorem 8.5], we can classify the maximal isotropy subgroups of G when $\mathrm{Fix}(G) = \{0\}$ in three types: $\Sigma$ is said to be of *real type* if $N$ is finite, of *complex type* if $N$ is either $S^1$ or $\widetilde{S^1}$ and of *quaternionic type* if $N \cong SU(2)$. Here $\widetilde{S^1}$ is an extension of $S^1$ by an element of order 4, and can be realized as a subgroup of the unit quaternions $SU(2)$: namely if $S^1 \subset SU(2)$ is the subgroup consisting of the elements $\cos\theta + i \sin\theta$, then $\widetilde{S^1}$ is the normalizer of $S^1$ in $SU(2)$, generated by $S^1$ and the element $j$.

**Theorem 1** *Let $\Sigma$ be a maximal isotropy subgroup of G. Let us consider the one parameter, G-equivariant, stationary bifurcation problem $\dot{x} = f(x, \lambda)$, $f(0,0) = 0$, with $f \in \mathcal{H}(V)$.*

*If $\Sigma$ is of complex type then $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) = 2n$ and there are at least $n$ or $n/2$ branches of G-orbits of rotating waves of isotropy $\Sigma$ accordingly as $N = S^1$ or $\widetilde{S^1}$.*

*If $\Sigma$ is of quaternionic type then there are at least $n$ branches of Hopf fibrations (foliations of $S^3$ by periodic solutions) of isotropy $\Sigma$ where $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) = 4n$.*

[1] UMR 129 CNRS-UNSA - 1361 route des Lucioles - F 06560 VALBONNE – Tél. (33) 92 96 73 00

Proof As in [7], we project the vector field on to $V/G$. The rescaling $\theta_1 = \epsilon^2$ and $\theta_i = \epsilon^{d_i}\omega_i$ for $i = 2 \dots l$, preserves the strata of $V/G$ (as relations defining the strata are homogeneous with weights). We search for zeros of the projected vector field $\tilde{f}$. The stationary bifurcation hypothesis allows us to solve $\dot{\theta}_1 = 0$ implicitly for $\lambda$ as a function of $\epsilon$ and the $\omega_i$'s. It then remains to solve the $l-1$ equations $\dot{\omega}_i = 0$ after replacing $\lambda$ with the above function. This leads to the search for zeros of a family $g(\epsilon, \omega)$ of vector fields associated to $\tilde{f}$ on the hyperplane $\{\theta_1 = 1\}$ of $\mathbf{R}^l$ and tangent to the strata of $V/G \cap \{\theta_1 = 1\}$.

As we are concerned only with solutions with isotropy $\Sigma$, we restrict to the projection of $\mathrm{Fix}(\Sigma)$. Since $\Sigma$ in maximal, it acts freely on the unit sphere $S(\Sigma)$ in $\mathrm{Fix}(\Sigma)$, so that $S(\Sigma)/N$ is a smooth manifold. Under hypotheses of genericity, the vector fields $g(\epsilon, \omega)$ have simple zeros on $S(\Sigma)/N$, so the Euler-Poincaré characteristic of $S(\Sigma)/N$ gives a lower bound for the number of zeros. The zeros give rise to branches of zeros in the projection of $\mathrm{Fix}(\Sigma)$.

If $N = S^1$, then $S^{2n-1}/N$ is $\mathbf{CP}^{n-1}$ whose Euler-Poincaré characteristic is $n$. If $N = \widetilde{S^1}$, then $S^{2n-1}/N$ is $\mathbf{CP}^{n-1}/\mathbf{Z}_2$ whose Euler-Poincaré characteristic is $n/2$ (as $\mathbf{Z}_2$ acts freely on $\mathbf{CP}^{n-1}$). The branches of zeros are then lifted back to get at least n or n/2 branches of rotating waves with isotropy $\Sigma$.

If $\Sigma$ is of quaternionic type, $S(\Sigma) = S^{4n-1}$. As $N = SU(2)$, $S^{4n-1}/N$ is the quaternionic projective space $\mathbf{HP}^{n-1}$ whose Euler-Poincaré characteristic turns out to be n. □

**Introduction** Considérons le problème de bifurcation stationnaire à un paramètre

$$\dot{x} = f(x, \lambda),\ f(0,0) = 0 \tag{1}$$

sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. On suppose que G est un groupe de Lie compact agissant linéairement et absolument irréductiblement sur V (c'est-à-dire que les applications linéaires qui commutent à l'action de G sont des homothéties réelles) et que $f$ est une famille de champs de vecteurs G-équivariants $\mathcal{C}^\infty$ sur V. Si on considère des problèmes de bifurcation non dégénérés, il est générique (voir [6]) de supposer que $D_x f(0, \lambda) = \lambda I$. On note $\mathcal{B}(V)$ l'ensemble des $f(x, \lambda)$ vérifiant ces hypothèses.

Pour les bifurcations de points d'équilibre, le Lemme de Bifurcation Equivariante [6] donne l'existence générique de branches bifurquées dans toute strate de type d'isotropie $\Sigma$ lorsque $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) = 1$ (ce qui entraine $\Sigma$ maximal au sens de l'inclusion des sous-groupes de G). Rappelons que si $\Sigma$ est un *groupe d'isotropie* (ou *stabilisateur*) pour l'action de G dans V, l'*espace de points fixes* de $\Sigma$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Fix}(\Sigma) = \{x \in V \mid \sigma x = x \,\forall\, \sigma \in \Sigma\}$ invariant par le flot de $f$ et la *strate de type* $\Sigma$ est l'union des orbites des points dont le groupe d'isotropie est $\Sigma$.

Dans le cas d'un groupe G continu, il est naturel de s'intéresser aux bifurcations d'*équilibres relatifs* (G-orbites invariantes par le flot). Nous avons donné dans [7] une caractérisation par type d'isotropie de telles bifurcations. Cependant, il n'y avait jusqu'à présent aucun exemple de bifurcation d'équilibres relatifs non stationnaires pour une action de G absolument irréductible.

La dynamique sur les équilibres relatifs a été décrite par Field [3] et Krupa [8]. Sa principale caractéristique est que les trajectoires sont denses sur des tores. Dans le cas où le tore en question est $S^1$, les trajectoires sont périodiques et s'appellent des *ondes rotatives*. Melbourne [9] vient de donner deux exemples de telles bifurcations, l'un avec une isotropie *complexe maximale* pour une action du produit semi-direct de $D_3$ avec le tore $T^3$ sur $\mathbf{R}^6$, l'autre avec une isotropie *quaternionique maximale* pour une action du produit semi-direct de $(SU(2))^8$ avec un groupe fini (d'ordre 16) sur $\mathbf{R}^{32}$. De plus, en se basant sur des résultats de Field [4, 5], il conclut à l'existence de telles branches bifurquées dans les espaces de points fixes des sous-groupes d'isotropie maximaux de type complexe ou quaternionique.

Nous proposons ce même résultat d'existence de branches bifurquées d'ondes rotatives en réduisant le problème (1) à l'espace des orbites de l'action de G.

**Espaces de points fixes, sous-groupes d'isotropie maximaux et équilibres relatifs** On suppose que l'action de G est absolument irréductible et que $\mathrm{Fix}(G) = \{0\}$. Si $\Sigma$ est un sous-groupe d'isotropie de G, on note $N(\Sigma)$ son *normalisateur*, $N = N(\Sigma)/\Sigma$ et $N^0$ la composante connexe de l'identité dans $N$ (c'est un sous groupe fermé distingué). De plus, si $\Sigma$ est maximal, G induit une action naturelle libre de N sur $\mathrm{Fix}(\Sigma)$. On dispose d'une classification des sous-groupes d'isotropie maximaux:

**Proposition 1** *(voir [2, Theorem 8.5]) Sous les hypothèses précédentes, on est dans l'un des trois cas suivants*

1. $N^0 = \mathbf{1}$. *On dit que* $\Sigma$ *est un sous-groupe* réel. *Les équilibres relatifs sont des équilibres.*

2. $N^0 \cong S^1$ *et* $N$ *est soit* $S^1$, *soit* $\widetilde{S^1}$. *Alors* $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ *est de dimension paire et* $\Sigma$ *est dit* complexe. *Le tore maximal de* $N$ *est* $S^1$*: les équilibres relatifs sont donc feuilletés par des solutions périodiques. On parle d'*ondes rotatives.

3. $N^0 \cong SU(2)$ *et* $N \cong SU(2)$. *Alors* $\dim \mathrm{Fix}(\Sigma) \equiv 0 \bmod 4$ *et* $\Sigma$ *est dit* quaternionique. *Le tore maximal de* $N$ *est aussi* $S^1$ *mais les équilibres relatifs sont feuilletés par des sphères* $S^3$*, elles-mêmes feuilletées par des solutions périodiques. Ce sont aussi des ondes rotatives mais pour plus de précision on parlera de* fibrations de Hopf.

Ici $\widetilde{S^1}$ est une extension de $S^1$ par un élément d'ordre 4, qui peut être réalisée comme sous-groupe des quaternions unitaires $SU(2)$: si $S^1 \subset SU(2)$ est le sous-groupe formé des éléments $\cos\theta + i\sin\theta$, alors $\widetilde{S^1}$ est le normalisateur de $S^1$ dans $SU(2)$, engendré par $S^1$ et l'élément $j$.

**Projection sur l'espace des orbites** Comme dans [7], nous projetons le système différentiel sur l'espace des orbites. Rappelons tout d'abord quelques résultats classiques de décomposition.

Soit $\theta_1(x), \ldots, \theta_l(x)$ une base de Hilbert minimale de polynômes G-invariants homogènes (théorème de Hilbert-Weyl). On sait que si $\{F_1, \ldots, F_k\}$ est un ensemble minimal de générateurs du module $P_G(V, V)$ des applications polynômiales G-équivariantes de V dans V, $f$ s'écrit

$$\sum_1^k f_j(\theta_1(x), \ldots, \theta_l(x), \lambda) F_j(x)$$

où $f_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^{l+1})$. De plus, comme l'action de G est absolument irréductible, on peut choisir les invariants et les équivariants de telle manière que $\theta_1(x) = \|x\|^2$, $F_1(x) = x$, $\deg \theta_j > 2$ et $\deg F_j > 1$ pour tout $j > 1$ (voir [6]).

L'espace des orbites $V/G$ s'identifie avec l'image de $\rho : x \in V \mapsto (\theta_1(x), \dots, \theta_l(x)) \in \mathbf{R}^l$. On notera souvent $\theta(x)$ ou même $\theta$ un point $(\theta_1(x), \dots, \theta_l(x))$ de $V/G$. $V/G$ est un ensemble semi-algébrique dont la stratification canonique coïncide avec la stratification par type d'isotropie. Le projeté d'un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ G-équivariant $f$ sur $V/G$ est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ $\tilde{f}$ de $\mathbf{R}^l$ tangent aux strates de $V/G$ dont la ième composante s'écrit $\dot{\theta}_i = (grad_x \theta_i \mid f(x))$.

Comme nous cherchons à caractériser des bifurcations d'équilibres relatifs de $f$, la projection permet de se ramener à des bifurcations de points d'équilibres donc à la recherche des zéros de $\tilde{f}$. On considère donc sur $V/G$ plongé dans $\mathbf{R}^l$ le problème suivant:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = \dot{\theta}_1 = 2f_1(\theta, \lambda)\theta_1 + \sum_{j=2}^k f_j(\theta, \lambda)\psi_j^1(\theta) \\ \vdots \\ 0 = \dot{\theta}_l = 2f_1(\theta, \lambda)\theta_l + \sum_{j=2}^k f_j(\theta, \lambda)\psi_j^l(\theta) \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\psi_j$ est le projeté de $F_j$. Chaque $\psi_j^i$ est donc un polynôme en les invariants, de degré en $x$ strictement supérieur à $d_i = \deg \theta_i$.

On effectue le changement d'échelle $\theta_1 = \epsilon^2$ et, pour tout $i = 2 \dots l$, $\theta_i = \epsilon^{d_i}\omega_i$. Ce changement d'échelle respecte les strates. En effet, les relations semi-algébriques qui définissent les strates de $V/G$ sont homogènes en $x$ donc homogènes avec poids en les invariants (les poids sont les degrés des invariants). On peut alors écrire chaque $\psi_j^i(\theta_1, \dots, \theta_l) = \psi_j^i(\epsilon^2, \epsilon^{d_2}\omega_2, \dots, \epsilon^{d_l}\omega_l)$ comme $\epsilon^{d_i}\phi_j^i(\epsilon, \omega_2, \dots, \omega_l)$ où $\phi_j^i$ est un polynôme en ses arguments tel que $\phi_j^i(0) = 0$.

Voyons que l'on peut résoudre la première équation de (2) par rapport à $\lambda$. D'après l'hypothèse de bifurcation stationnaire, $f_1(\theta(x), \lambda) = \lambda +$ termes d'ordre au moins 2 en $(x, \lambda)$. La première équation devient:

$$0 = 2(\lambda + \text{termes d'ordre supérieur})\epsilon^2 + \epsilon^2 \sum_{j=2}^k f_j(\epsilon^2, \epsilon^{d_2}\omega_2, \dots, \epsilon^{d_l}\omega_l, \lambda)\phi_j^i(\epsilon, \omega_2, \dots, \omega_l)$$

qui, après simplification par $\epsilon^2$, se résoud en $\lambda$ par le théorème des fonctions implicites. On obtient alors $\lambda = \lambda(\epsilon, \omega_2, \dots, \omega_l)$. Notons que, ayant résolu $\dot{\theta}_1 = 0$, $\epsilon$ ne dépend pas du temps.

En reportant l'expression de $\lambda$ dans les autres équations, on obtient $\dot{\theta}_i = \epsilon^{d_i}\dot{\omega}_i = \epsilon^{d_i}g_i(\epsilon, \omega_2, \dots, \omega_l)$ pour $i = 2$ à $l$. Après simplification par $\epsilon^{d_i}$, on se ramène à la recherche des zéros d'une famille $g$ de champs de vecteurs associée à $\tilde{f}$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dot{\omega}_2 & = & g_2(\epsilon, \omega_2, \dots, \omega_l) \\ & \vdots & \\ \dot{\omega}_l & = & g_l(\epsilon, \omega_2, \dots, \omega_l) \end{array} \right. \tag{3}$$

sur l'hyperplan $\{\theta_1 = 1\}$ de $\mathbf{R}^l$ et tangent aux strates de $V/G \cap \{\theta_1 = 1\}$.

**Existence d'ondes rotatives.** Soit $\mathcal{H}(V)$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}(V)$ des $f(x, \lambda)$ tels que, si $\tilde{f}(\theta) = 0$ et si $S_\theta$ est la strate de $\theta$ dans $V/G$, $\theta$ est un zéro simple pour $\tilde{f}_{|S_\theta}$. Le résultat suivant se déduit directement d'un théorème de Field [3, théorème C, section 7].

**Lemme 1** *$\mathcal{H}(V)$ est résiduel dans $\mathcal{B}(V)$.*

Il est donc générique de supposer que $f \in \mathcal{H}(V)$, ce que nous ferons.

**Théorème 1** *Soit $G$ un groupe de Lie compact agissant absolument irréductiblement sur un espace vectoriel $V$ de dimension finie et $\Sigma$ un sous-groupe d'isotropie complexe maximal .*

*Pour tout $f \in \mathcal{H}(V)$, le problème de bifurcation stationnaire à un paramètre $G$-équivariant $\dot{x} = f(x,\lambda)$, $f(0,0) = 0$ admet, dans le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ *de dimension $2n$, au moins $n$ ou $n/2$ branches de $G$-orbites d'ondes rotatives selon que $N(\Sigma)/\Sigma = S^1$ ou $\widetilde{S^1}$.*

Démonstration On effectue tout d'abord la réduction du paragraphe précédent qui permet de se placer dans l'hyperplan $\{\theta_1 = 1\}$ de $\mathbf{R}^l$. De plus, comme on cherche des ondes rotatives d'isotropie $\Sigma$, si $\pi$ est la projection sur $V/G$, on peut se restreindre à $\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma))$.

Ceci revient donc à la détermination du nombre de zéros du champ de vecteurs $g$ obtenu précédemment sur $\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma)) \cap \{\theta_1 = 1\}$. Comme $\theta_1$ est la norme, $\{\theta_1 = 1\}$ est isomorphe à $S(V)/G$ où $S(V)$ est la sphère unité de V. L'application $\pi$ projette $\mathrm{Fix}(\Sigma) \cap S(V)$ sur $\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma)) \cap \{\theta_1 = 1\}$. Comme $\mathrm{Fix}(\Sigma)$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $2n$, $\mathrm{Fix}(\Sigma) \cap S(V)$ est une sphère de dimension $2n-1$ de $\mathrm{Fix}(\Sigma)$. Comme $\Sigma$ est maximal, on peut montrer que

$$\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma) \cap S(V)) \approx \frac{S^{2n-1}}{N}.$$

Nous nous sommes donc ramenés à la détermination du nombre de zéros d'un champ de vecteurs sur $S^{2n-1}/N$. Comme $N^0$ est un sous-groupe fermé distingué de N, on peut montrer facilement que

$$\frac{S^{2n-1}}{N} \approx \frac{S^{2n-1}/N^0}{N/N^0}.$$

De plus, $N^0 \cong S^1$ et $N/N^0$ est un groupe $\Gamma$ qui est soit $\mathbf{1}$ soit $\mathbf{Z}_2$ (qui agit librement sur $S^{2n-1}/N^0$). D'où finalement

$$\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma)) \cap \{\theta_1 = 1\} \approx \frac{\mathbf{CP}^{n-1}}{\Gamma}.$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathbf{CP}^{n-1}$ est $\chi(\mathbf{CP}^{n-1}) = n$. Si $\Gamma = \mathbf{Z}_2$, comme l'action est libre on a

$$\chi(\frac{\mathbf{CP}^{n-1}}{\Gamma}) = \frac{\chi(\mathbf{CP}^{n-1})}{\sharp(\Gamma)} = \frac{n}{2}.$$

En effet, une triangulation du quotient se relève en une triangulation de $\mathbf{CP}^{n-1}$ avec $\sharp(\Gamma)$ fois le nombre de sommets, d'arêtes, ...

Pour chaque valeur du paramètre $\epsilon$, on obtient donc au moins n ou n/2 points d'équilibre du problème (3). Comme les zéros de $\tilde{f}$ sur $\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma)) \cap \{\theta_1 = 1\}$ se déduisent de ceux de $g$, les n ou n/2 zéros de $g$ sont simples (si ce n'était pas le cas, le zéro de $\tilde{f}$ correspondant ne le serait pas. Or $f \in \mathcal{H}(V)$ !). De plus, il est clair que

(i) ces zéros dépendent continument du paramètre $\epsilon$ pour $\epsilon \geq 0$

(ii) ils dépendent de manière $\mathcal{C}^\infty$de $\epsilon$ pour $\epsilon > 0$.

Soit $(\omega_2^o(\epsilon), \ldots, \omega_l^o(\epsilon))$ une de ces solutions. Alors la branche de zéros du système (2) $\theta^o(\epsilon) = (\epsilon^2, \epsilon^{d_2}\omega_2^o(\epsilon), \ldots, \epsilon^{d_l}\omega_l^o(\epsilon))$ est $\mathcal{C}^1$ pour $\epsilon \geq 0$. On obtient donc au moins n ou n/2 branches de zéros bifurqués dans le projeté de Fix($\Sigma$), selon que N est $S^1$ ou $\widetilde{S^1}$, qui se relèvent en au moins n ou n/2 branches de G-orbites d'ondes rotatives d'isotropie $\Sigma$. $\square$

**Théorème 2** *Soit G un groupe de Lie compact agissant absolument irréductiblement sur un espace vectoriel V de dimension finie et* $\Sigma$ *un sous-groupe d'isotropie quaternionique maximal .*

*Pour tout* $f \in \mathcal{H}(V)$*, le problème de bifurcation stationnaire à un paramètre G-équivariant* $\dot{x} = f(x, \lambda)$, $f(0,0) = 0$ *admet au moins n branches de fibrations de Hopf dans le sous-espace vectoriel* Fix($\Sigma$) *de dimension 4n.*

Démonstration La démonstration est semblable à celle du cas complexe. Comme $\dim(\mathrm{Fix}(\Sigma)) = 4n$, on cherche le nombre de zéros d'un champ de vecteurs sur $S^{4n-1}/N$ et l'on a $N \cong SU(2)$. D'où

$$\pi(\mathrm{Fix}(\Sigma)) \cap \{\theta_1 = 1\} \approx \frac{S^{4n-1}}{SU(2)} \approx \mathbf{HP}^{n-1},$$

l'espace projectif quaternionique. On peut montrer, par un argument de suite spectrale de Leray, que sa caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à $n$ (voir par exemple [1]). $\square$

Nous voudrions remercier Ian Melbourne pour des discussions utiles.

# References


[1] R. Bott and L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1982)

[2] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics 46, Academic Press, New York, (1972)

[3] M. J. Field, *Equivariant dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 259 (1980), 185–205

[4] M. J. Field, *Geometric methods in bifurcation theory*, Dans: Pattern formation and symmetry breaking in PDEs. Fields Inst. Communications, AMS (1994).

[5] M. J. Field, *Symmetry breaking for compact Lie groups*, University of Houston preprint, (1994)

[6] M. Golubitsky, I. N. Stewart and D. G. Schaeffer, *Singularities and groups in bifurcation theory vol II*, Applied Mathematical Sciences 69, Springer-Verlag, New York, (1988)

[7] M. Kœnig et P. Chossat, *Caractérisation des bifurcations pour les champs de vecteurs équivariants sous l'action d'un groupe de Lie compact*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, t. 318 (1994), 31–36

[8] M. Krupa, *Bifurcations of relative equilibria*, SIAM J. Appl. Math., 21 (1990), 1453–1486

[9] I. Melbourne, *Maximal isotropy subgroups for absolutely irreducible representations of compact Lie groups*, preprint INLN, (1994)