Lezione 3 (25/8/2023) : categorie cartesiane chiuse

Aggiunzioni

Def. Siano $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ categorie. Un'aggiunzione fra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ consiste di

- funtori $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$, $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$
- per ogni $X \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{D}$ una biiezione

$$\varphi_{X,A} : \mathbb{C}(X, GA) \longrightarrow \mathbb{D}(FX, A)$$

tali che :

(i) per ogni $u: X' \to X$ in $\mathbb{C}$ e $A \in \mathbb{D}$

$$
\begin{tikzcd}
X \xrightarrow{f} GA \arrow[d, mapsto] & \ni & \mathbb{C}(X, GA) \arrow[r, "\varphi_{X,A}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\checkmark"] & \mathbb{D}(FX, A) \arrow[d] & FX \xrightarrow{f} A \arrow[d, mapsto] \\
X' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} GA & \ni & \mathbb{C}(X', GA) \arrow[r, "\varphi_{X',A}"'] & \mathbb{D}(FX', A) & FX' \xrightarrow{Fu} FX \xrightarrow{f} A
\end{tikzcd}
$$

(ii) per ogni $X \in \mathbb{C}$, $v: A \to A'$ in $\mathbb{D}$

$$
\begin{tikzcd}
X \xrightarrow{f} GA \arrow[d, mapsto] & \ni & \mathbb{C}(X, GA) \arrow[r, "\varphi_{X,A}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\checkmark"] & \mathbb{D}(FX, A) \arrow[d] & \ni & FX \xrightarrow{f} A \arrow[d, mapsto] \\
X \xrightarrow{f} GA \xrightarrow{Gv} GA' & & \mathbb{C}(X, GA') \arrow[r, "\varphi_{X,A'}"'] & \mathbb{D}(FX, A') & \ni & FX \xrightarrow{f} A \xrightarrow{v} A'
\end{tikzcd}
$$

Notazione / terminologia

- F è detto aggiunto sinistro, G l'aggiunto destro
- $F \dashv G$
- Per $f : X \longrightarrow GA$, scriveremo $f^{\#} : FX \longrightarrow A$ al posto di $\varphi(f)$, detta la trasposta di f
- Riscriviamo (i), (ii)

$$f^{\#} \cdot Fu = (f \cdot u)^{\#}$$

$$v \cdot f^{\#} = (Gv \cdot f)^{\#}$$

Esempio

$$\begin{tikzcd} \underline{Set} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \underline{Mon} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

- FX = monoide libero generato da X
- $\underline{Set}(X, M) \cong \underline{Mon}(FX, M)$

Teorema Sia $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ un funtore. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $\exists\ F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, φ famiglia di biezioni che formano un'aggiunzione

(2) $\exists$ $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ e trasformazioni naturali

$$\eta : 1_{\mathbb{C}} \Longrightarrow GF \quad , \quad \varepsilon : FG \Longrightarrow 1_{\mathbb{D}}$$

t.c.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, bend right, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, bend right, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

(3) Per ogni $X \in \mathbb{C}$, abbiamo

- $FX \in \mathbb{D}$
- $\eta_X : X \longrightarrow GFX$

che sono universali, nel senso che per ogni

- $A \in \mathbb{D}$
- $f : X \longrightarrow GA$

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\;G\;} \mathbb{D}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & GFX \arrow[d, "Gf^{\#}"] & & FX \arrow[d, dotted, "\exists!\, f^{\#}"] \\
& GA & & A
\end{tikzcd}$$

ovvero, la funzione

$$\mathbb{C}(X, GA) \xleftarrow{\;G(-)\cdot\eta_X\;} \mathbb{D}(FX, A)$$

$$X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{Gu} GA \longleftarrow FX \xrightarrow{u} A$$

è biiettiva, con inversa $(-)^{\#}$.

Esempio La condizione (3) per $\underline{\mathrm{Mon}}$ vs $\underline{\mathrm{Set}}$ diventa

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\mathrm{Set}} & & & \underline{\mathrm{Mon}} \arrow[lll, "U"'] \\
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & UFX \arrow[d, "Uf^{\#}"] & & & FX \arrow[d, dotted, "\exists f^{\#}"] \\
 & UM & & & M .
\end{tikzcd}
$$

Nota Partendo dalla condizione (3), si può estendere

F ad un funtore:

$$f : X \longrightarrow Y \quad \xmapsto{\ ?\ } \quad FX \xrightarrow{Ff} FY$$

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\ G\ } \mathbb{D}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & GFX \arrow[d, "GFf"] & & FX \arrow[d, dashed, "\exists!\ F(f) =_{def} (\eta_Y \cdot f)^\#"] \\
Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & GFY & & FY
\end{tikzcd}$$

Da dim:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$F(1_X) = 1_{FX}$$

Note Il teorema precedente ha un duale, in cui si assume $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ e si hanno condizioni (3') per ottenere un aggiunto destro:

(3') Per ogni $A \in \mathbb{D}$, abbiamo

- $GA \in \mathbb{C}$
- $\varepsilon_A : FGA \longrightarrow A$

che sono universali, nel senso che per ogni

- $X \in \mathbb{C}$
- $u : FX \longrightarrow A$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\ F\ } \mathbb{D}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dotted, "\exists ! u^b"'] & & FX \arrow[d, "Fu^b"'] \arrow[drr, bend left, "u"] & & \\
GA & & FGA \arrow[rr, "\varepsilon_A"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Prodotti binari

Def Sia $\mathbb{C}$ una categoria. Diremo che $\mathbb{C}$ ha prodotti binari se per ogni $A, B \in \mathbb{C}$ abbiamo

- un oggetto $A \times B \in \mathbb{C}$
- mappe, dette proiezioni, $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$, $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$

universali, nel senso che per ogni

- $X \in \mathbb{C}$
- mappe $a : X \longrightarrow A$, $b : X \longrightarrow B$

esiste un'unica mappa $\mathrm{pair}(a, b) : X \longrightarrow A \times B$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, bend right, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{pair}(a,b)"] \arrow[dr, bend left, "b"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Esempi $\underline{\mathbf{Set}}$, $\underline{\mathbf{Grp}}$, ..., $\underline{\mathbf{Top}}$, $\mathbf{Psh}(\mathbb{C})$.

In $\underline{\mathbf{Set}}$: mappe $1 \xrightarrow{x} S \iff x \in S$

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, bend right, "a"'] \arrow[d, "\mathrm{pair}(a,b)"] \arrow[dr, bend left, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, bend right, "a"'] \arrow[d, dotted, "\mathrm{pair}(a,b)"] \arrow[dr, bend left, "b"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Prop $\mathbb{C}$ ha prodotti binari se e solo se

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \arrow[l, bend left, shift left=2] \\ X \arrow[r, mapsto] & (X, X) \end{tikzcd}$$

ha un aggiunto destro, con in particolare

$$\underbrace{(\mathbb{C}\times\mathbb{C})(\underset{\substack{\wr \\ \Delta X}}{(X,X)}, (A,B))}_{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{C}(X,A) \times \mathbb{C}(X,B)}} \cong \mathbb{C}(X, \underset{\substack{\wr \\ \text{aggiunto dx} \\ \text{applicato ad } (A,B)}}{A \times B})$$

Nella versione $(3')$ di aggiunzione, ε e' qui dato da $(\pi_1, \pi_2) : (A\times B, A\times B) \longrightarrow (A, B)$.

__Osservazioni__ L'operazione $A, B \mapsto A \times B$ si estende ad un funtore: dati $A \xrightarrow{f} A'$, $B \xrightarrow{g} B'$ definiamo $f \times g : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ come

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[dd, dashed, "f \times g"] & \\
A \arrow[d, "f"'] & & B \arrow[d, "g"] \\
A' & A' \times B' \arrow[l] \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}
$$

__Esercizio__ Se $\mathbb{C}$ ha oggetto terminale 1 e prodotti binari

(i) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

(ii) $1 \times A \cong A \cong A \times 1$

(iii) $A \times B \cong B \times A$.

Esponenziali

Sia $\mathbb{C}$ una categoria con prodotti binari.

Def Diremo che $\mathbb{C}$ ha esponenziali se, dato $A \in \mathbb{C}$,

per ogni $B \in \mathbb{C}$, abbiamo

- un oggetto $B^A \in \mathbb{C}$
- una mappa $\mathrm{app} : B^A \times A \longrightarrow B$

universali, nel senso che per ogni

- $X \in \mathbb{C}$
- mappa $b : X \times A \longrightarrow B$

esiste un'unica mappa $\lambda(b) : X \longrightarrow B^A$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
X \times A \arrow[d, "\lambda(b) \times 1_A"'] \arrow[dr, bend left, "b"] & \\
B^A \times A \arrow[r, "app"'] & A
\end{tikzcd}$$

<u>Prop</u> $\mathbb{C}$ ha esponenziali se e solo se $\forall A \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{(-) \times A} \mathbb{C}$$

ha un aggiunto destro $(-)^A$, con

$$\mathbb{C}(X \times A, B) \cong \mathbb{C}(X, B^A)$$

Esempi: $\mathbf{Set}$, ~~Grp~~, ~~Top~~, $\mathbf{Psh}(\mathbb{C})$.

Definizione: Una categoria $\mathbb{C}$ è detta essere **cartesiana chiusa** se ha oggetto terminale (1) prodotti binari $(A \times B)$ ed esponenziali (B^A).

Isomorfismo di Curry - Howard - Lawvere

Logica	Teoria dei tipi	Categorie
$A, B, \ldots$ formule	$A, B, \ldots$ tipi	$A, B, \ldots$ oggetti
$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash a : A$	$X \xrightarrow{a} A$
$A \wedge B$	$A \times B$	$A \times B$
$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$	B^A
$\top$	1	1

Esercizio : Sia $\mathbb{C}$ una categoria cartesiana chiusa.

Si costruiscano mappe :

$$\frac{FX \to A}{X \to GA}$$

① $B^A \times C^B \longrightarrow C^A$

② $B_1^A \times B_2^A \longrightarrow (B_1 \times B_2)^A$

③ $(C^B)^A \times B \longrightarrow C^A$

③ :
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(C^B)^A \times B \longrightarrow C^A}{(C^B)^A \times B \times A \longrightarrow C}}{(C^B)^A \times A \times B \longrightarrow C}}{(C^B)^A \times A \times B \xrightarrow{app \times 1_B} C^B \times B \xrightarrow{app} C}$$