Logica Categoriale

Scuola Estiva AILA

Gargnano, Agosto 2023

Def. Una categoria $\mathbb{C}$ consiste di:

- una classe $Ob(\mathbb{C})$;
- per ogni $X, Y \in Ob(\mathbb{C})$, una classe $\mathbb{C}(X, Y)$;
- per ogni $X, Y, Z \in Ob(\mathbb{C})$, una funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(Y,Z) \times \mathbb{C}(X,Y) &\xrightarrow{\circ} \mathbb{C}(X,Z) \\ g \quad , \quad f \quad &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

- per ogni $X \in Ob(\mathbb{C})$, un elemento $1_X \in \mathbb{C}(X, X)$

che soddisfano le seguenti proprietà

- $\forall f \in \mathbb{C}(X,Y)$, $g \in \mathbb{C}(Y,Z)$, $h \in \mathbb{C}(Z,W)$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- $\forall f \in \mathbb{C}(X,Y)$, $\quad f \circ 1_X = f$, $\quad 1_Y \circ f = f$.

Terminogia / notazione

- $X \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ $\sim$ X è un oggetto di $\mathbb{C}$

- $f \in \mathbb{C}(X, Y)$ $\sim$ $f : X \longrightarrow Y$ è morfismo/mappa/freccia di $\mathbb{C}$

- $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$
  $g \circ f$ è la freccia composta di f e g.

- $1_X \in \mathbb{C}(X, X)$ $\quad X \xrightarrow{1_X} X$ l'identità di X.

<u>Def</u> Una categoria $\mathbb{C}$ è

- **localmente piccola**, se $\forall X, Y \in Ob(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}(X, Y)$ è un insieme
- **piccola** se $Ob(\mathbb{C})$ è un insieme ed è localmente piccola.

Esempi

$\mathcal{C}$	$Ob(\mathcal{C})$	Morfismi
Set	insiemi	funzioni
Grp	gruppi	omomorfismi di gruppi
Top	spazi topologici	funzioni continue
Rel	insiemi	relazioni $R \in Rel(X,Y) \Leftrightarrow R \subseteq X \times Y$.

Monoidi come categorie

Sia $(M, \cdot, 1)$ un monoide.

Definiamo una categoria $\underline{M}$

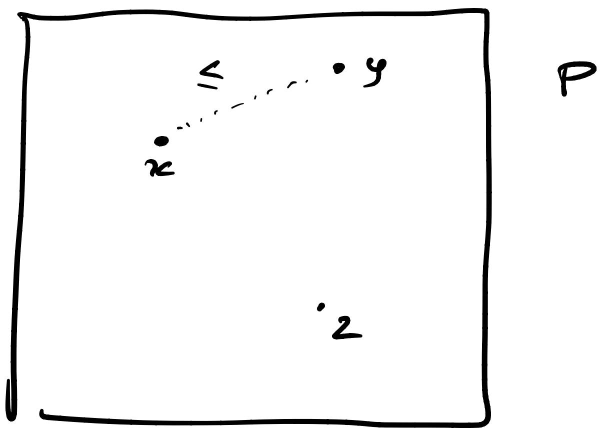
- $Ob(\underline{M}) = \{*\}$
- $\underline{M}(*,*) = M$
- $\underline{M}(*,*) \times \underline{M}(*,*) \xrightarrow{\cdot} \underline{M}(*,*)$
- $1_M \in \underline{M}(*,*)$ elemento neutro,

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato.

Definiamo una categoria $\underline{P}$:

- $Ob(\underline{P}) = P$
- $\underline{P}(x,y)$ ha un unico elemento sse $x \leq y$ in P.



Nozioni di base

Def $\mathcal{C}$ categoria, $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$

- Un inversa di f è una mappa $g : Y \longrightarrow X$ t.c.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, bend right, "1_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

- f è un isomorfismo se ha un'inversa.

Def. Sia $\mathbb{C}$ una categoria. Un oggetto T di $\mathbb{C}$ è detto essere terminale se

$$\forall X \in \mathbb{C} \quad \exists! \, f : X \longrightarrow T$$

Ex Siano $T, T' \in \mathbb{C}$. Se T, T' sono terminali allora esiste un unico isomorfismo $T \longrightarrow T'$.

Sol: T' terminale $\Rightarrow \exists! \quad T \longrightarrow T'$

T terminale $\Rightarrow \exists! \quad T' \longrightarrow T$

Da verificare

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "1_T"'] & T' \arrow[r] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T' \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "1_{T'}"'] & T \arrow[r] & T' \end{tikzcd}$$

Def. Siano $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ categorie. Un funtore $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ consiste di:

- una funzione
$$F : Ob(\mathbb{C}) \longrightarrow Ob(\mathbb{D})$$
$$X \longmapsto FX$$

- $\forall\, X, Y \in Ob(\mathbb{C})$, una funzione
$$F_{X,Y} : \mathbb{C}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{D}(FX, FY)$$
$$f \longmapsto F_{X,Y}(f)$$

t.c.

- $\forall\ X \xrightarrow{f} Y,\ Y \xrightarrow{g} Z$ $\qquad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
- $\forall\, X,$ $\qquad F(1_X) = 1_{FX}$

Esempi

- $U : \underline{\mathrm{Grp}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}}$
  $(G, \cdot, 1) \longmapsto G$

$F : \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Grp}$
$X \longmapsto$ gruppo libero su X

- $U : \underline{\mathrm{Top}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}}$
  $(X, \mathcal{O}(X)) \longmapsto X$

$\mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Top}$
$X \longmapsto (X,$ top. discreta$)$

$\mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Top}$
$X \longmapsto (X, \mathcal{P}(X))$

Ex

- Se $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ sono monoidi

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D} \iff \text{omomorfismo di monoidi}$$

- Se $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ sono insiemi parzialmente ordinati

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D} \iff \text{funzione che preserva ordine.}$$

$\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$, $\mathbb{D} \xrightarrow{G} \mathbb{E}$, possiamo definire

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{G \circ F} \mathbb{E} \\ X &\longmapsto GFX \end{aligned}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \longmapsto GFX \xrightarrow{GFf} GFY$$

$\Rightarrow$ **Cat** la categoria con

- oggetti : categorie piccole
- mappe : funtori.

Def. Siano $F, G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$. Una trasformazione naturale $\phi : F \Rightarrow G$ consiste di

- una famiglie di frecce $\phi_X : FX \longrightarrow GX$ in $\mathbb{D}$, $X \in \mathbb{C}$

t.c. $\forall f : X \longrightarrow Y$ in $\mathbb{C}$

$$
\mathbb{C} \qquad\qquad \mathbb{D}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \\
Y
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\phi_Y"'] & GY
\end{tikzcd}
\qquad \left(\text{naturalità di } \phi \right)
$$

Esempio

$$\begin{tikzcd} \mathbf{CRing} \arrow[r, bend left, "M_n"] \arrow[r, bend right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \det"] & \mathbf{Mon} \end{tikzcd}$$

$M_n(R)$ = monoide delle matrici $n \times n$ con coefficienti in R

$U(R)$ = monoide soggiacente a R

$$\begin{aligned} \det_R : \quad M_n(R) &\longrightarrow U(R) \\ A &\longmapsto \det_R(A) \end{aligned}$$

Possiamo comporre trasformazioni naturali :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, "G"] \arrow[rr, bend right, "H"'] & & \mathbb{D} \end{tikzcd}$$

$\phi : F \Rightarrow G$, $\quad \psi : G \Rightarrow H$

Definiamo $\psi\phi : F \Longrightarrow H$:

- dato $X \in \mathbb{C}$, definiamo $(\psi\phi)_X : FX \longrightarrow HX$

  come la composta $FX \xrightarrow{\phi_X} GX \xrightarrow{\psi_X} HX$

Naturalità

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "Gf"] & HX \arrow[d, "Hf"] \\ FY \arrow[r, "\phi_Y"'] & GY \arrow[r, "\psi_Y"'] & HY \end{tikzcd}$$

Quindi, fissate categorie $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, con $\mathbb{C}$ piccola,

esiste una nuova categoria $[\mathbb{C}, \mathbb{D}]$ detta

la categoria dei funtori con

- oggetti: funtori $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$
- mappe: trasformazioni naturali $\phi : F \Rightarrow G$.

<u>Def</u>. Un isomorfismo naturale è un isomorfismo in una categoria $[\mathbb{C}, \mathbb{D}]$ ovvero una $\phi : F \Rightarrow G$ t.c. ϕ_X isomorfismo $\forall X$.

Definizione Siano $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ categorie. Un'equivalenza tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ è il dato di

- funtori $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$, $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$
- isomorfismi naturali $\eta : 1_{\mathbb{C}} \Longrightarrow GF$, $\varepsilon : FG \Longrightarrow 1_{\mathbb{D}}$

Nota: $\forall X \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$\underbrace{X \cong GFX}_{\eta_X}$$

$\forall Y \in \mathbb{D}$, abbiamo

$$\underbrace{Y \cong FGY}_{\varepsilon_Y}$$

Teorema*. Siano $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ categorie, $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ un funtore. Le seguenti sono equivalenti:

① $\exists\, G : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ \eta, \varepsilon$ che formano con F un' equivalenza

② F e'

- essenzialmente suriettivo: $\forall Y \in \mathbb{D}\ \exists X \in \mathbb{C}$ t.c. $FX \cong Y$
- pieno: $\forall X, Y \quad \mathbb{C}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{D}(FX, FY)$ suriettiva
- fedele $\forall X, Y \quad \mathbb{C}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{D}(FX, FY)$ iniettiva.

* Usando AC.

① $\Rightarrow$ ② : semplice

② $\Rightarrow$ ① : Abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "F"'] & \mathbb{D} \arrow[l, dashed, bend right, "G"'] \end{tikzcd}.$$

Ess. suriettivo : $\forall A \in \mathbb{D} \;\; \exists X \in \mathbb{C} \;\; \exists$ iso $FX \longrightarrow A$

$\Rightarrow$ (AC per classi) $\forall A$ abbiamo $GA \in \mathbb{C}$ iso $\varepsilon_A : FGA \longrightarrow A$.

Dobbiamo estendere G ad un funtore, verificare ε naturale.

Data $f: A \to B$ esiste un unica mappa $Gf : GA \longrightarrow GB$ t.c.

$$\begin{tikzcd} FGA \arrow[r, dashed, "FGf"] \arrow[d, "\varepsilon_A"'] & FGB \arrow[d, "\varepsilon_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Funtorialità $\quad G(g \circ f) \quad$ vs $\quad G(g) \cdot G(f)$

$G(1_A) \quad$ vs $\quad 1_{GA}$

Ora vogliamo $\eta : 1 \Rightarrow GF$, ovvero $\eta_X : X \longrightarrow GFX$

F pieno e fedele $\Rightarrow$ $\mathbb{C}(X,Y) \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}(FX, FY)$

quindi, in particolare $\mathbb{C}(X, GFX) \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}(FX, FGFX)$

Ma abbiamo $\varepsilon_{FX} : FGFX \longrightarrow FX$, quindi otteniamo

η_X come l'unica mappa t.c.

$$
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "F\eta_X"] \arrow[dr, bend right, "1_{FX}"'] & FGFX \arrow[d, "\varepsilon_{FX}"] \\
 & FX
\end{tikzcd}
$$