Introductie tot de *wheel the*

Kan een vierkant wiel even goed rollen als een rond wiel? Wel als je het de juiste weg geeft. In dit artikel verkennen we hoe zo'n weg er dan moet uitzien. Het zal blijken dat de wiskunde wielen met een andere vorm - zoals een ster, een vijfhoek of een bloem - in staat stelt een weg te vinden waarop ze kunnen rollen.

Het probleem van het onregelmatig wiel is een klassiek voorbeeld in de wiskundige analyse. Het combineert verschillende begrippen zoals periodieke functies, afgeleiden, numerieke integratie en differentiaalvergelijkingen tot een elegant geheel.

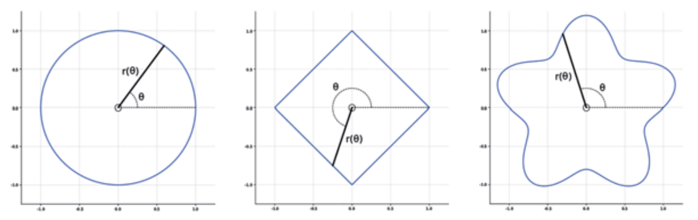
Het is die wiskunde, samen met een ingenieursachtergrond, een lasercutter en een beetje programmeerwerk die de aanleiding waren tot een demo, ook te bekijken op http://numa.cs.kuleuven.be/demos/wheels_roads/main.php.

De wiskunde achter het probleem

Laat ons eerst de voorwaarden bepalen waaraan een onregelmatig wiel moet voldoen. De wiskundige vertaling van deze voorwaarden zal dan leiden tot een differentiaalvergelijking waaraan elk wiel en elke bijhorende weg moeten voldoen.

Een wiel roteert rond een as. Poolcoördinaten zijn dan ook de meest aangewezen manier.

Figuur 1 toont een wiel en bijpassende functie $r(\theta)$ die voor elke hoek θ de straal r van het wiel geeft.

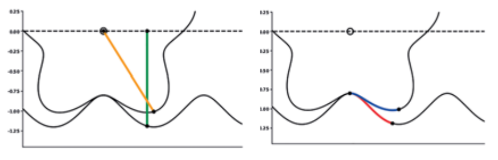


Figuur 1: Enkele voorbeelden van wielen beschreven in poolcoördinaten. De cirkel, het vierkant en de zeester beschreven door de functies $r(\theta) = 1$, $r(\theta) = (|\sin(\theta)| + |\cos(\theta)|)^{-1}$ en $r(\theta) = 1 + \sin(5\theta)$.

We zoeken nu de beschrijving van een weg die ervoor zorgt dat de as van het wiel op een constante hoogte blijft.

Zo verkrijgen we een comfortabele rit voor de passagier in de wagen waarop het wiel is gemonteerd. Laat ons deze hoogte in het *xy*-assenstelsel op $y = 0$ vastleggen.

De weg $y(x)$, passend bij het wiel, moet dus voldoen aan $y(x) = -r(\theta(x))$. De wijzigende straal van het wiel wordt dan voor elke positie x exact gecompenseerd door de hoogteverandering van de weg, en de as blijft steeds op hoogte $y = 0$. Laat ons dit de *radiusvoorwaarde* noemen, zie ook figuur 2.

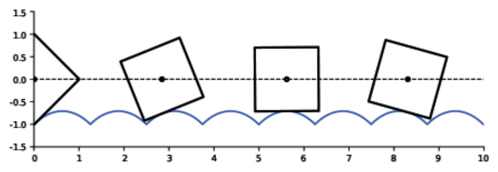

Figuur 2: De radius- en rolvoorwaarde

Het wiel moet bovendien mooi rollen en mag niet glijden over de weg. Over een vaste tijdstap moeten de lengte van het afgelegde stuk weg en de afgelegde booglengte van het wiel dus identiek zijn. Dit is de *rolvoorwaarde*, grafisch weergegeven in figuur 2.

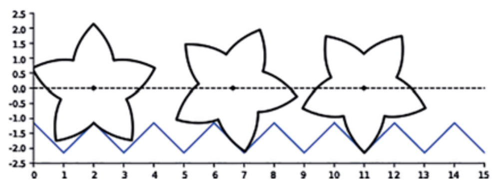
Deze twee voorwaarden, samen met wat elementaire wiskunde, leiden tot de differentiaalvergelijking $(r(\theta))^{-1}=d\theta/dx$.

Een mooi analytisch oplosbaar voorbeeld is een wiel in de vorm van een regelmatige veelhoek, met het vierkant wiel als bekendste voorbeeld. Je kan een levensgrote uitvoering van een fiets met vierkante wielen zelf uitproberen in Technopolis in Mechelen.

De weg horend bij een vierkant wiel bestaat uit aaneengesloten kettinglijnen, zie figuur 3, waarop een veelhoek zonder glijden kan rollen. Figuur 4 toont bijvoorbeeld een wiel dat hoort bij een zaagtandverloop.



Figuur 3: Aaneengesloten kettinglijnen stemmen overeen met veelhoek-wielen.



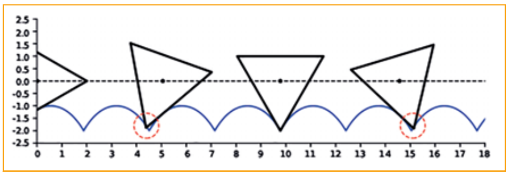
Figuur 4: Zaagtandverloop en bijhorend wiel.

De kritische lezer vraagt zich natuurlijk onmiddellijk af of elk onregelmatig wiel leidt tot een mogelijke oplossing. Het antwoord is neen. Er zijn wielen, zoals de driehoek uit figuur 5, waarbij er, ondanks een passende weg, geen rolbeweging mogelijk is. Het wiel botst tegen de weg en blokkeert.

Een toepassing van bovenstaande *wheel theory* is echter niet zo exotisch als op het eerste gezicht zou lijken. De achterliggende wiskunde blijkt ook nuttig bij bijvoorbeeld de constructie van tandwielsystemen in mechanische overbrengingen. De tanden van twee ineengrijpende tandwielen moeten zonder slippen over elkaar rollen om slijtage tegen te gaan. Een probleem dat opvallend veel gelijkenissen vertoont met het ontwerpen van de weg waarop een onregelmatig wiel zonder wrijven kan rollen. Ook hier moet de ingenieur een differentiaalvergelijking oplossen.

Praktische opstelling

Het Departement Computerwetenschappen nam vorig jaar deel aan de opendeurdag van de Faculteit Wetenschappen. Daarvoor werden twee demonstraties ontwikkeld die gebruik maken van de *wheel theory*. FabLab zorgde voor echte wagentjes, met monteerbare en eenvoudig wisselbare wielen (zie figuur 6). Het zoeken van de passende ondergrond bij de verschillende onregelmatige wielen bleek niet alleen voor kinderen, maar ook voor de ervaren ingenieur een leuke puzzel.



Figuur 5: Een driehoek kan nooit een wiel zijn.

Daarnaast werd ook software ontwikkeld waarmee kinderen met de nodige verbeelding zelf een onregelmatig wiel konden ontwerpen en onderzoeken hoe dat wiel over de bijhorende weg rolt. Met dank aan Euler (voor de differentiaalvergelijking) kan men nu eenvoudig hartvormige wielen monteren op een politiewagen (figuur 7).

We stellen deze software graag ter beschikking van de lezers van GeniaaL. Een alternatieve implementatie gebruikt de programmeertaal Julia maar vraagt wat meer installatiewerk. Het installatieproces loont, want men kan praktisch eender welk wiel op een auto naar keuze monteren en dan een filmpje genereren waarin de auto over de weg rijdt.

Tot slot gebiedt de eerlijkheid ons om te vertellen dat wij dit alles natuurlijk niet uit onze duim gezogen hebben. Meer details zijn te vinden in de bestaande literatuur, waar een meer diepgaande studie over dit onderwerp te vinden is. Onze glimlach verschijnt bij het neerschrijven van de essentiële referentie: Leon Hall, Stan Wagon, *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 5, (Dec., 1992), pp. 283–301.

Figuur 6: Demowagentje met monteerbare wielen.

Figuur 7: Hartelijke politiewagen.

Bekijk ook het filmpje op
http://numa.cs.kuleuven.be/demos/wheels_roads/main.php

Daan Camps, Dan Pilbauer, Pieterjan Robbe, Raf Vandebril, Marcus Webb